GEWÖHNLICHE DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN

VON

J. HORN

GÖSCHENS LEHRBÜCHEREI

I. GRUPPE

REINE MATHEMATIK

BAND 10

Walter de Gruyter & Co.
Postscheckkonto:

Berlin W 10 und Leipzig
Berlin NW 7 Nr. 595 33

GÖSCHENS LEHRBÜCHEREI

Mit diesem Unternehmen bezwecken wir eine Sammlung von ausgesprochenen Lehrbüchern aus den Gebieten der Mathematik, der exakten Naturwissenschaften und der Technik, die wissenschaftliche Gründlichkeit, leichte Verständlichkeit und klaren Aufbau in sich vereinen und ganz besonders für Studierende der Universitäten und technischen Hochschulen, für Lehramtskandidaten und Lehrer mittlerer und höherer Schulen, zur Benutzung an Lehrerseminaren, sowie auch für das Selbststudium gleichartig vorgebildeter Leser geeignet sind. Jeder Band wird einen Umfang von 10 bis 20 Druckbogen haben (im allgemeinen etwa 15 bis 16 Bogen) und ungefähr den Inhalt einer einsemestrigen Vorlesung umfassen

Walter de Gruyter & Co. **Berlin W 10 und Leipzig**
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 595 33

Göschens Lehrbücherei

Bisher erschienen die nachstehend verzeichneten Bände der

Gruppe 1: Reine Mathematik

Band 1: **Irrationalzahlen.** Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Professor an der Universität München. 1921. (VIII, 186 Seiten.) Broschiert 6.—, geb. 7.—

Band 2: **Praxis der Gleichungen.** Von Dr. C. RUNGE, o. Professor an der Universität Göttingen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. 1921. (V, 172 Seiten.) Broschiert 6.—, geb. 7.—

Band 3: **Grundlehren der neueren Zahlentheorie.** Von Professor Dr. PAUL BACHMANN. Zweite, verbesserte Auflage. Herausgegeben von Dr. ROBERT HAUSSNER, ord. Professor an der Universität Jena. Mit 10 Figuren. 1921. (XV, 246 Seiten.) Broschiert 8.50, geb. 9.50

Band 4: **Synthetische Zahlentheorie.** Von Dr. RUDOLF FUETER, ord. Professor an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. 1925. (VIII, 277 Seiten.) Broschiert 10.—, geb. 12.—

Band 5: **Automorphe Funktionen.** Von Dr. L. SCHLESINGER, ord. Professor an der Universität Gießen. 1924. (X, 205 Seiten.) Broschiert 8.—, geb. 9.20

Band 6: **Einführung in die Axiomatik der Algebra.** Von Dr. H. BECK, ord. Professor an der Universität Bonn. 1926. (X, 198 Seiten.) Broschiert 9.—, geb. 10.50

Band 7: **Mengenlehre.** Von Dr. F. HAUSDORFF, ord. Professor an der Universität Bonn. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 12 Figuren. 1927. (285 Seiten.) Broschiert 12.—, geb. 13.50

Band 8 u. 9: **Algebra.** Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Professor an der Universität München. I. Band: Die Grundlagen. Mit 4 Figuren. 1927. (VIII, 307 Seiten.) Broschiert 10.—, geb. 11.50
II. Band: Theorie der algebraischen Gleichungen. Mit 5 Figuren. 1927. (VIII, 243 Seiten.) Broschiert 8.—, geb. 9.50

Band 10: **Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Dr. J. HORN, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearb. Auflage. Mit 4 Figuren. 1927. (VIII, 197 Seiten.) Broschiert 9.—, geb. 10.50

Band 11: **Elliptische Funktionen.** Von Dr. R. KÖNIG, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. KRAFFT, Privatdozent an der Universität Marburg i. H. Im Druck

Weitere Bände in Vorbereitung

Walter de Gruyter & Co. **Berlin W 10 und Leipzig**
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 595 33

MATHEMATIK
AUS DER SAMMLUNG GÖSCHEN
Jeder Band gebunden 1.50

Geschichte der Mathematik. Von Oberstud.-Dir. Dr. H. Wieleitner. 2 Bde. . . . . Nr. 226, 875

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen, in zwei Farben zusammengestellt. Von Prof. Dr. Herm. Schubert. Neue Ausg. v. Prof. Dr. Rob. Haußner. Nr. 81

Fünfstellige Logarithmen. Von Reg.-Rat Direktor Prof. Aug. Adler . . . . . Nr. 423

Mathematische Formelsammlung. Von Prof. O. Th. Bürklen. Völlig umgearb. Neuausg. von Dr. F. Ringleb, Assistent am Mathem. Institut und Seminar der Universität Jena. Mit 36 Fig. . . . . Nr. 51

Arithmetik nebst Gleichungen 1. u. 2. Grades. Von Prof. Dr. Herm. Schubert und Stud.-Rat Prof. Paul B. Fischer . . . . . Nr. 47

Elementare Algebra. Von Stud.-Rat Prof. Paul B. Fischer. Mit 20 Fig. . . . . Nr. 930

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Prof. Dr. Herm. Schubert. Neubearb. von Stud.-Rat Prof. Paul B. Fischer. Mit 8 Fig. . Nr. 48

Höhere Algebra. Von Prof. Dr. H. Hasse.
I. Lineare Gleichungen . . . . . Nr. 931
II. Gleichungen höheren Grades. Mit 5 Fig. Nr. 932

Praktisches Zahlenrechnen. Von Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. Mit 58 Fig. . . . . Nr. 405

Determinanten. Von Stud.-R. Prof. P. B. Fischer. Nr. 402

Gruppentheorie. Von Dr. Ludw. Baumgartner. Mit 8 Fig. . . . . Nr. 837

Elementare Reihenlehre. Von Prof. Dr. Hans Falckenberg. Mit 4 Fig. . . . . Nr. 943

Niedere Analysis. Von Prof. Dr. B. Sporer. Mit 5 Fig. . . . . Nr. 53

Höhere Analysis I: Differentialrechnung. Von Rektor Dr. Friedr. Junker. Mit 167 Übungsbeisp. und 67 Fig. . . . . Nr. 87

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Von Rektor Dr. Friedr. Junker. Mit 46 Fig. . . . . Nr. 146

Höhere Analysis II: Integralrechnung. Von Rektor Dr. Friedr. Junker. Mit 50 Fig. . . . . Nr. 88

Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung. V. Rekt. Dr. Fr. Junker. M. 52 Fig. Nr. 147

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Priv.-Doz. Dr. G. Hoheisel . . . . . Nr. 920

Einleitung in die Funktionentheorie. (Die komplexen Zahlen und ihre elementaren Funktionen.) Von Oberlehrer M. Rose. Mit 10 Fig. . . . Nr. 581

Funktionentheorie. Von Prof. Dr. Konrad Knopp.
I. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Fig. . . Nr. 668
II. Anwendungen und Weiterführungen der allgem. Theorie. Mit 7 Fig. . . . . Nr. 703

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie I. u. II. Von Prof. Dr. K. Knopp . . . . . Nr. 877, 878

Einführung in die konforme Abbildung. Von Prof. Dr. Ludwig Bieberbach. Mit 38 Fig. . . . Nr. 768

Potentialtheorie. Von Privatdoz. Dr. W. Sternberg.
I. Die Elemente d. Potentialtheorie. M. 5 Fig. Nr. 901
II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Fig. . . . . Nr. 944

Vektoranalysis. Von Prof. Dr. Siegfr. Valentiner. Mit 16 Fig. . . . . Nr. 354

Graphische Integration. Von Privatdozent Dr. F. A. Willers. Mit 53 Fig. . . . . Nr. 801

Numerische Integration. Von Privatdozent Dr. F. A. Willers. Mit 2 Fig. . . . . Nr. 864

Ebene Geometrie. Von Prof. G. Mahler. Mit 110 zweifarb. Fig. . . . . Nr. 41

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Prof. Dr. Gerh. Hessenberg. Mit 59 Fig. . . . . Nr. 99

Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Von Studienrat Dr. Fritz Heiland. Mit 26 Fig. . . . . Nr. 848

Stereometrie. V. Prof. Dr. R. Glaser. M. 81 Fig. Nr. 97

Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie. Von Prof. Dr. Robert Glaser. Mit 54 Fig. Nr. 779

Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Geometrie der Ebene. Von Prof. Dr. R. Baldus. Mit 71 Fig. . . . . Nr. 970

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Von Prof. Dr. K. Doehlemann. Mit 114 Fig. 2 Bände . . . . . Nr. 72, 876

Darstellende Geometrie. Von Prof. Dr. Robert Haußner. Mit 198 Fig. 2 Bde. . . . Nr. 142, 143

Geometrisches Zeichnen. Von H. Becker. Neubearb. von Dir. Prof. J. Vonderlinn. Mit 290 Fig. u. 23 Taf. Nr. 58

Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Von Privatdoz. Prof. Dr. Marcello Pirani. Mit 58 Fig. . . . . Nr. 728

Analytische Geometrie der Ebene. Von Prof. Dr. M. Simon. Mit 52 Fig. . . . . Nr. 65

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. V. Prof. O. Th. Bürklen. M. 31 Fig. Nr. 256

Analytische Geometrie des Raumes. Von Prof. Dr. M. Simon. Mit 28 Fig. . . . . Nr. 89

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie d. Raumes. Von Prof. O. Th. Bürklen. Mit 8 Fig. Nr. 309

Koordinatensysteme. Von Prof. Paul B. Fischer. Mit 8 Fig. . . . . Nr. 507

Algebraische Kurven. Neue Bearbeit. von Oberstud.-Direktor Dr. H. Wieleitner.
I. Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Nr. 435
II. Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Fig. Nr. 436

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Prof. Dr. O. Knopf. 2 Bde. Mit 10 Fig. . . . . Nr. 508, 871

Politische Arithmetik. Von Honorardozent Dr. E. Foerster . . . . . Nr. 879

Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Prof. Wilh. Weitbrecht. 2 Bde. Mit 16 Fig. . . . . Nr. 302, 641

Vermessungskunde. Von Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. 3 Bde. Mit 294 Fig. . . . Nr. 468, 469, 862

Geodäsie (Landesvermessung und Erdmessung). Von Prof. Dr. G. Förster. Mit 33 Fig. . Nr. 102

Mathematische Instrumente. Von Privatdoz. Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Fig. . . . . Nr. 922

Versicherungsmathematik. Von Prof. Dr. Fr. Boehm.
I. Elemente der Versicherungsrechnung. Nr. 180
II. Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung . . . . . Nr. 917

Die Nomographie des Bauingenieurs. Von Prof. Dr.-Ing. Max Mayer. Mit 47 Fig. . . . . Nr. 959

UNIVERSITY OF MAINE
LIBRARIES

RAYMOND H. FOGLER LIBRARY
ORONO

Göschens Lehrbücherei

1. Gruppe

Reine Mathematik

Band 10

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Von

Professor Dr. J. Horn

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg
Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
Berlin W 10 und Leipzig
1927

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Von

Dr. J. Horn
o. Professor an der Technischen Hochschule
Darmstadt

Zweite, völlig umgearbeitete Auflage

Mit 4 Figuren

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg
Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
Berlin W 10 und Leipzig
1927

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten

Druck von C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig.

Vorwort.

Das vorliegende Buch beginnt mit einer elementar gehaltenen Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, geht aber in den späteren Teilen über die Anfangsgründe hinaus. In den fünf ersten Kapiteln wird nur die Differential- und Integralrechnung, im sechsten und siebenten (teilweise auch im achten und neunten) Kapitel werden auch die Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen vorausgesetzt.

Meine Aufgabe war, aus dem seit längerer Zeit vergriffenen Band L der Sammlung Schubert „Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung" ein elementareres Buch von geringerem Umfang zu machen, das sich in Göschens Lehrbücherei einfügt. Bei dieser Umarbeitung sind manche Abschnitte des früheren Werkes fortgefallen (z. B. die Transformation linearer Substitutionen in n Veränderlichen, die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen, die unendlichen Determinanten und ihre Anwendung auf lineare Differentialgleichungen, die Einführung in Painlevés Untersuchungen über Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit eindeutigem allgemeinen Integral), während dafür manches Elementare und dem reellen Gebiet Angehörige aufgenommen worden ist. Bei der Auswahl des Stoffes habe ich Gegenstände, welche Anwendungen zulassen, bevorzugt.

Soweit es sich um die funktionentheoretische Behandlung der Differentialgleichungen handelt, kann das 1922 im gleichen Verlage erschienene Buch von Schlesinger „Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage" (3. Aufl. von Bd. XIII der Sammlung Schubert) als Ergänzung des vorliegenden Werkes dienen.

Darmstadt, im Juli 1927.

J. Horn.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel. **Elementare Integrationsmethoden.** Seite

§ 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen 1
§ 2. Geometrische Deutung einer Differentialgleichung erster Ordnung 2
§ 3. Trennung der Veränderlichen 3
§ 4. Homogene Differentialgleichungen 5
§ 5. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung 8
§ 6. Exakte Differentialgleichungen 11
§ 7. Integrierender Faktor 13
§ 8. Clairautsche Differentialgleichung 16
§ 9. Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich auf Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen lassen 18
§ 10. Differentialgleichung zweiter Ordnung und System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung 23

Zweites Kapitel. **Existenzbeweise. Methode der schrittweisen Annäherung.**

§ 11. Differentialgleichung erster Ordnung 25
§ 12. System von Differentialgleichungen 31
§ 13. Singuläre Lösungen 35

Drittes Kapitel. **Numerische und graphische Näherungsmethoden.**

§ 14. Angenäherte Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung 39
§ 15. Methode von Runge und Kutta 42
§ 16. Differentialgleichungssysteme und Differentialgleichungen zweiter Ordnung . 45
§ 17. Graphische Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung 48
§ 18. Anwendung der Methode der schrittweisen Annäherung zur graphischen oder numerischen Lösung von Differentialgleichungen 50

Viertes Kapitel. **Lineare Differentialgleichungen; elementare Integrationsmethoden.**

§ 19. Existenz der Lösungen linearer Differentialgleichungen 55
§ 20. Fundamentalsystem von Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung 56
§ 21. Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . 61
§ 22. Nichthomogene lineare Differentialgleichungen 66
§ 23. Nichthomogene lineare Differentialgleichungen, besonderer Fall 70

Seite

§ 24. Kleine Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad 72
§ 25. Reduktion linearer Differentialgleichungen 75
§ 26. Systeme linearer Differentialgleichungen 78
§ 27. Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . 82
§ 28. Kleine Schwingungen mechanischer Systeme mit mehreren Freiheitsgraden . 86

Fünftes Kapitel. **Lineare Differentialgleichungen; weitere Untersuchungen im reellen Gebiet.**

§ 29. Über die Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung 90
§ 30. Lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten 94
§ 31. Durchführung und Beispiel 97

Sechstes Kapitel. **Existenzbeweise im komplexen Gebiet.**

§ 32. Existenz der Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung 101
§ 33. Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten 105
§ 34. Eindeutige Bestimmung einer Lösung durch die Anfangswerte 107
§ 35. Existenz der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen 109

Siebentes Kapitel. **Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet.**

§ 36. Reguläre und singuläre Stellen einer linearen Differentialgleichung 111
§ 37. Reihenentwicklung der Integrale in der Umgebung einer singulären Stelle der Bestimmtheit 113
§ 38. Mehrfache Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung und Wurzeln mit ganzzahligen Differenzen 116
§ 39. Konvergenzbeweis 122
§ 40. Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typus 124
§ 41. Die Gaußsche Differentialgleichung 126
§ 42. Die Legendresche Differentialgleichung 129
§ 43. Die Besselsche Differentialgleichung 132
§ 44. Reihenentwicklung der Integrale in der Umgebung einer allgemeineren singulären Stelle 138
§ 45. Form der Differentialgleichung in der Umgebung einer singulären Stelle der Bestimmtheit 144

Achtes Kapitel. **Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten.**

§ 46. Abhängigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen von Parametern 147
§ 47. Abhängigkeit der Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung von den Anfangswerten 151
§ 48. Übertragung auf ein Differentialgleichungssystem 153
§ 49. Die einem Differentialgleichungssystem zugeordnete lineare partielle Differentialgleichung 155
§ 50. Weitere Untersuchungen über Differentialgleichungen mit einem Parameter. 158
§ 51. Periodische Lösungen eines Differentialgleichungssystems mit einem Parameter. Erster Fall 161
§ 52. Periodische Lösungen eines Differentialgleichungssystems mit einem Parameter. Zweiter Fall 164

Neuntes Kapitel. **Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen.**

Seite

§ 53. Die einfachsten Singularitäten einer Differentialgleichung erster Ordnung . 166
§ 54. Reihenentwicklung der Lösungen von Differentialgleichungssystemen in der Umgebung singulärer Stellen 169
§ 55. Singuläre Punkte der reellen Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung 176
§ 56. Der Fall des Wirbelpunktes 181
§ 57. Ausnahmefälle 185
§ 58. Divergente Reihen, welche Differentialgleichungen genügen 188
Literatur 195
Sachregister 196

Erstes Kapitel.

Elementare Integrationsmethoden.

§ 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x, einer Funktion y von x und einem oder mehreren Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$. Ist $\frac{d^ny}{dx^n}$ der höchste vorkommende Differentialquotient, so liegt eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung vor. Wir schreiben sie in der Form

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

wo F eine Funktion der beigefügten Größen bezeichnet. Unter einer Lösung oder einem Integral der Differentialgleichung verstehen wir eine Funktion y von x, welche die Differentialgleichung identisch (d. h. für beliebige Werte von x) befriedigt; die Bestimmung der Lösungen wird Integration der Differentialgleichung genannt.

Die Differentialgleichung erster Ordnung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

können wir nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst und so auf die Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{A}$$

gebracht denken. Wenn man

$$f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

setzt, erhält die Differentialgleichung die Gestalt

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{B}$$

wo P und Q gegebene Funktionen der beiden Veränderlichen x, y sind. Wir können nach Belieben y als Funktion von x oder x als Funktion von y auffassen.

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

können wir uns nach $\frac{d^2y}{dx^2}$ aufgelöst denken, so daß sie in der Form erscheint:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{C}$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

hat die Lösung

$$y = \int f(x)\,dx + C$$

mit der willkürlichen Konstanten C. Die Berechnung eines Integrals $\int f(x)\,dx$, die wir jetzt Quadratur nennen, erscheint so als besonderer Fall der Integration einer Differentialgleichung.

Die älteren Mathematiker haben sich vorzugsweise mit solchen Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung beschäftigt, welche sich mit Hilfe von Quadraturen (gewöhnlichen Integralen) lösen lassen. In denjenigen Fällen, in welchen sich diese Quadraturen vermittels elementarer Funktionen ausführen lassen, gelangt man zu Differentialgleichungen, deren Lösung nur elementare Funktionen erfordert.

Wir betrachten zunächst, dem Gange der geschichtlichen Entwicklung folgend, in §§ 3—9 einige Klassen von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, welche sich durch Quadraturen integrieren lassen. Später wenden wir uns, da eine Integration durch Quadraturen nur ausnahmsweise möglich ist, anderen Integrationsmethoden zu.

§ 2. Geometrische Deutung einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Eine Lösung $y = \varphi(x)$ einer Differentialgleichung kann man, indem man x, y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes der Ebene auffaßt, geometrisch durch eine Kurve darstellen, welche man als Integralkurve der Differentialgleichung bezeichnet.

Die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{A}$$

mit der wir uns zunächst beschäftigen wollen, kann folgendermaßen geometrisch gedeutet werden. Jedem Punkt x, y eines gewissen

Gebietes der xy-Ebene möge durch die Differentialgleichung (A) eine bestimmte Richtung

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = y' = f(x, y)$$

zugeordnet werden. Wir denken uns durch den Punkt x, y ein Geradenstück gelegt, welches mit der x-Achse den Winkel α bildet. (Die Zusammenfassung eines Punktes und einer durch ihn gehenden Richtung wird als „Linienelement" bezeichnet, welches durch das Wertsystem x, y, y' bestimmt ist.) Die Differentialgleichung (A) bestimmt ein Richtungsfeld. Die Kurve $y = \varphi(x)$ ist eine Integralkurve der Differentialgleichung (A), wenn die Tangente in jedem Kurvenpunkt x, y die Richtung hat, welche dem Punkt x, y vermöge der Gleichung (1) zugeordnet ist.

Um einen vorläufigen Überblick über die Integralkurven der Differentialgleichung (A) zu gewinnen, wenden wir ein Näherungsverfahren an. Durch einen gegebenen Punkt P_0 mit den Koordinaten a, b legen wir ein Geradenstück, welches die dem Punkt P_0 entsprechende Richtung $\operatorname{tg}\alpha_0 = f(a, b)$ hat. Wir nehmen auf diesem Geradenstück in der Nähe von P_0 einen Punkt P_1 mit den Koordinaten a_1, b_1 an, wobei etwa $a_1 > a$ sein möge. Durch den Punkt P_1 legen wir ein Geradenstück, welches die dem Punkt P_1 zugeordnete Richtung $\operatorname{tg}\alpha_1 = f(a_1, b_1)$ hat, und wählen auf dieser Geraden in der Nähe von P_1 einen Punkt P_2 mit den Koordinaten a_2, b_2, wo wieder $a_2 > a_1$ sein möge. Wenn wir so fortfahren, erhalten wir eine gebrochene Linie $P_0P_1P_2 \ldots$. Wir können vermuten, daß diese gebrochene Linie von einer Integralkurve der Differentialgleichung (A) um so weniger abweicht, je näher P_1 bei P_0, P_2 bei P_1 usw. angenommen wird. Unter gewissen Voraussetzungen über die Funktion $f(x, y)$ wird diese Vermutung in § 11 bestätigt werden. Durch einen gegebenen Punkt P_0 geht also eine Integralkurve der Differentialgleichung.

Ändern wir die Ordinate b des Punktes P_0, während die Abszisse a festgehalten wird, so erhalten wir eine Schar von Integralkurven, wobei b die Rolle des Parameters der Kurvenschar spielt (dieselbe Rolle wie künftig die willkürliche Konstante C).

§ 3. Trennung der Veränderlichen.

Eine Differentialgleichung erster Ordnung kann nach § 1 auf die Form gebracht werden:

$$\text{(B)} \qquad P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0\,.$$

Wir betrachten den besonderen Fall, daß P nur von x, Q nur von y abhängt, so daß die Differentialgleichung

$$\text{(2)} \qquad P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$$

vorliegt. Die linke Seite dieser Gleichung ist das Differential der Funktion

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy,$$

wobei wir uns die Integrationskonstante willkürlich, aber fest gewählt denken. Diese Funktion muß, da ihr Differential verschwindet, konstant sein. Aus der Differentialgleichung (2) folgt also die Integralgleichung

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C, \tag{3}$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet.

Wenn sich eine Differentialgleichung erster Ordnung auf die Form (2) bringen läßt oder, anders ausgedrückt, wenn sich die Veränderlichen x, y trennen lassen, ist die Integration durch Quadraturen möglich. Differentialgleichungen von anderer Form lassen sich bisweilen durch Einführung neuer Veränderlichen auf Differentialgleichungen zurückführen, in denen die Veränderlichen getrennt sind.

Die Gleichung (3), eine Gleichung zwischen x und y mit einer willkürlichen Konstanten C, stellt geometrisch eine Schar von Integralkurven der Differentialgleichung dar. In der Gleichung (3) haben wir, so lange C unbestimmt bleibt, das „allgemeine" Integral oder die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2). Legt man der Konstanten C einen bestimmten Wert bei, so hat man ein „partikuläres" Integral, welches geometrisch durch eine einzelne Integralkurve dargestellt wird.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

schreibt sich nach Trennung der Veränderlichen

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Die Integration ergibt

$$\int x\,dx + \int y\,dy = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

oder, wenn man die willkürliche Konstante C gleich $\frac{c}{2}$ setzt,

$$x^2 + y^2 = c.$$

Das allgemeine Integral wird für $c \geqq 0$ durch eine Schar konzentrischer Kreise dargestellt. Durch jeden Punkt $x = a$, $y = b$ geht ein bestimmter Kreis der Schar, entsprechend der Konstanten $c = a^2 + b^2$.

Beispiel. Die Kurven, für welche die Subtangente gleich der doppelten Abszisse ist, genügen der Differentialgleichung

$$y\frac{dx}{dy} = 2x$$

oder

$$\frac{dx}{x} = 2\frac{dy}{y}.$$

Die Integration ergibt, wenn links die willkürliche Konstante $\log C$ beigefügt wird,

$$\log C + \log x = 2\log y$$

oder

$$y^2 = Cx.$$

Wir haben eine Schar von Parabeln, welche die y-Achse im Anfangspunkt berühren. Durch den Punkt $x = a$, $y = b$ geht die Parabel mit dem Parameter $C = \frac{b^2}{a}$ (im Falle $a = 0$, $C = \infty$ die Gerade $x = 0$).

§ 4. Homogene Differentialgleichungen.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{4}$$

deren rechte Seite nur von dem Quotienten $\frac{y}{x}$ abhängt, geht, wenn man

$$y = xz \tag{5}$$

und demnach

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

setzt, in

$$x\frac{dz}{dx} = f(z) - z$$

und durch Trennung der Veränderlichen x und z in

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}$$

über. Die beiderseitige Integration ergibt

$$\log x = \int \frac{dz}{f(z) - z} + \log C,$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet, oder

$$x = Ce^{\int \frac{dz}{f(z)-z}}. \tag{6}$$

Wenn man auf der rechten Seite z durch $\frac{y}{x}$ ersetzt, erhält man die Integralgleichung in der Form

$$x = C\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)^{1}). \tag{7}$$

Die Differentialgleichung

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

kann auf die Form (4) gebracht werden, wenn P und Q homogene Funktionen gleichen Grades von x, y sind. Ist dieser Grad m, so hat man, wenn λ eine willkürliche Größe darstellt,

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m P(x, y), \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m Q(x, y)\,.$$

Die Differentialgleichung schreibt sich in der Gestalt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = -\frac{\lambda^m P(x, y)}{\lambda^m Q(x, y)} = -\frac{P(\lambda x, \lambda y)}{Q(\lambda x, \lambda y)}$$

oder, wenn $\lambda = \frac{1}{x}$ gesetzt wird,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)},$$

so daß die rechte Seite nur von $\frac{y}{x}$ abhängt.

Eine Differentialgleichung von der Form (4) wird als homogene Differentialgleichung bezeichnet.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0\,,$$

die man auch in der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}}$$

schreiben könnte, geht, wenn man

$$y = xz, \quad dy = x\,dz + z\,dx$$

setzt, über in

$$(1 + z^2)\,dx + 2xz\,dz = 0$$

---

[1]) Die Differentialgleichung (4) besitzt außerdem die Lösung $y = kx$, wenn die Konstante k der Gleichung $f(k) = k$ genügt. Diese Lösung ist durch die Division mit $f(z) - z$ verlorengegangen.

oder
$$\frac{dx}{x} + \frac{2z\,dz}{1+z^2} = 0.$$

Die Integration ergibt

$$\log x + \log(1+z^2) = \log(2C),$$

wo rechts eine willkürliche Konstante steht. Daraus folgt

$$x(1+z^2) = 2C$$

und

$$x^2 + y^2 = 2Cx,$$

d. i. eine Schar von Kreisen, welche die y-Achse im Koordinatenanfang berühren.

In Verbindung mit den homogenen Differentialgleichungen betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right). \tag{8}$$

Diese Gleichung ist homogen, wenn $c = 0$, $c' = 0$ ist. Sind c und c' nicht beide Null, so führt man an Stelle von x, y neue Veränderliche ξ, η ein, indem man setzt:

$$x = \xi + h, \qquad y = \eta + k.$$

Dann ist $dx = d\xi$, $dy = d\eta$ und

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi+b\eta+ah+bk+c}{a'\xi+b'\eta+a'h+b'k+c'}\right).$$

Bestimmt man h und k aus den beiden linearen Gleichungen

$$ah+bk+c=0, \qquad a'h+b'k+c'=0,$$

was freilich nur im Falle $ab' - a'b \neq 0$ möglich ist, so hat man die homogene Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a'\xi+b'\eta}\right).$$

In geometrischer Ausdrucksweise können wir sagen: wir verschieben die Achsen parallel, indem wir den Punkt $x = h$, $y = k$, den Schnittpunkt der Geraden

$$ax+by+c=0, \qquad a'x+b'y+c'=0,$$

zum Anfangspunkt machen; dabei ist vorausgesetzt, daß diese beiden Geraden nicht parallel sind.

Wenn $ab' - a'b = 0$ und $b \neq 0$ ist, setzen wir $b' = mb$, $a' = ma$, so daß wir die Differentialgleichung haben:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{m(ax+by)+c'}\right).$$

Setzen wir jetzt

$$z = ax + by, \quad \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx},$$

so haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = a + bf\left(\frac{z+c}{mz+c'}\right),$$

die durch Trennung der Veränderlichen integriert wird. Wenn $b' \neq 0$ ist, kann man $z = a'x + b'y$ setzen. Im Falle $b = 0$, $b' = 0$ ist $\frac{dy}{dx}$ als Funktion von x allein dargestellt.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$(4x + 3y + 1)\,dx + (3x + 2y + 1)\,dy = 0$$

geht durch die Substitution $x = \xi - 1$, $y = \eta + 1$ in eine homogene Differentialgleichung über. Sie hat das allgemeine Integral

$$2x^2 + 3xy + y^2 + x + y = C.$$

Beispiel. Die Lösung der Differentialgleichung

$$(x - 2y + 9)\,dx = (3x - 6y + 19)\,dy$$

ergibt sich vermittels der Substitution $x - 2y = z$ in der Form

$$x - 3y + 8\log(x - 2y + 1) = C.$$

§ 5. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{9}$$

in welcher y und $\frac{dy}{dx}$ linear vorkommen, während P und Q irgendwie von x abhängen, wird als lineare Differentialgleichung erster Ordnung bezeichnet.

In der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{10}$$

(die jetzt in bezug auf y und $\frac{dy}{dx}$ homogen ist) lassen sich die Veränderlichen trennen:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx;$$

die Integration ergibt

$$\log y = -\int P(x)\,dx + \log C$$

oder

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}, \tag{11}$$

wo C eine willkürliche Konstante darstellt.

Um die nichthomogene lineare Differentialgleichung (9) zu integrieren, wenden wir die Methode der Variation der Konstanten von Lagrange an. Wir verstehen jetzt unter C eine Funktion von x, die wir so bestimmen, daß der Ausdruck (11) die Differentialgleichung (9) befriedigt. Aus (11) folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}\, e^{-\int P(x)\,dx} - Ce^{-\int P(x)\,dx} \cdot P(x);$$

die Einsetzung in (9) ergibt

$$\frac{dC}{dx} e^{-\int P(x)\,dx} - CP(x)e^{-\int P(x)\,dx} + CP(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$$

oder, da das zweite und das dritte Glied sich wegheben,

$$\frac{dC}{dx} = Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}.$$

Daraus folgt

$$C = \int Q(x) e^{\int P(x)\,dx}\,dx + c, \tag{12}$$

wo c eine willkürliche Konstante ist. Durch Einsetzung des Ausdrucks (12) in (11) erhält man die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung (9) in der Form

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x) e^{\int P(x)\,dx}\,dx + c\right]. \tag{13}$$

Beispiel.

$$\frac{dy}{dx} - 2y = e^x.$$

Die homogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

hat die Lösung

$$y = Ce^{2x}.$$

Setzt man diesen Ausdruck, indem man C als Funktion von x auffaßt, in die vorgelegte Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\frac{dC}{dx} = e^{-x}, \quad C = -e^{-x} + c,$$

wo c eine willkürliche Konstante ist. Demnach ist

$$y = e^{2x}(-e^{-x} + c) = -e^x + ce^{2x}.$$

Beispiel. Der Widerstand eines Stromkreises sei R und der Koeffizient der Selbstinduktion L. Zwischen der von der Zeit t abhängigen Stromstärke J und der elektromotorischen Kraft E besteht nach dem Ohmschen Gesetz unter Berücksichtigung der Selbstinduktion die Gleichung

$$(\alpha) \qquad E = RJ + L\frac{dJ}{dt}.$$

Wenn die elektromotorische Kraft E eine gegebene Funktion von t ist, findet man die Abhängigkeit der Stromstärke J von der Zeit t durch Integration der linearen Differentialgleichung (α) in der Form

$$J = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t}\, dt + C\right),$$

wo C die Integrationskonstante ist.

Ist $E = A \sin qt$ gegeben, so hat man

$$J = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{A}{L}\int \sin qt\, e^{\frac{R}{L}t}\, dt + C\right).$$

Man benutzt die Formel

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)$$

$$= \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin(\beta x - \gamma);$$

dabei ist

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}; \qquad \cos\gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \qquad \sin\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Wenn der Strom zur Zeit $t = t_0$ geschlossen wird, ist die Konstante C so zu bestimmen, daß für $t = t_0$ $J = 0$ wird. Es ergibt sich, wenn

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{qL}{R}$$

gesetzt wird,

$$J = \frac{A}{\sqrt{R^2 + q^2L^2}}\left\{\sin(qt - \gamma) - \sin(qt_0 - \gamma)\, e^{-\frac{R}{L}(t - t_0)}\right\}.$$

Da die im letzten Glied enthaltene Exponentialfunktion mit wachsender Zeit rasch abnimmt, so ist angenähert

$$J = \frac{A \sin(qt - \gamma)}{\sqrt{R^2 + q^2L^2}}.$$

Zwischen dem Strom J und der elektromotorischen Kraft E besteht die Phasenverschiebung γ.

Im Falle eines konstanten E hat man, wenn der Strom zur Zeit $t = 0$ geschlossen wird, also für $t = 0$ $J = 0$ ist,

$$J = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

In diesem besonderen Falle kann die Differentialgleichung (α) auch durch Trennung der Veränderlichen integriert werden.

Die Bernoullische Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{14}$$

in welcher n eine von 0 und 1 verschiedene Konstante ist, geht durch Multiplikation mit y^{-n} über in

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

Setzt man

$$y^{1-n} = z, \qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx},$$

so hat man die lineare Differentialgleichung

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x).$$

Beispiel. Die Bernoullische Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} - xy = xy^2$$

wird durch die Substitution $y^{-1} = z$ in die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + xz = -x$$

mit dem allgemeinen Integral

$$z = Ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1$$

übergeführt; es ist also

$$y = \frac{1}{Ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1}.$$

§ 6. Exakte Differentialgleichungen.

Die Differentialgleichung (B) heißt eine exakte Differentialgleichung, wenn ihre linke Seite ein vollständiges Differential ist, d. h. wenn eine Funktion u der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y so vorhanden ist, daß

$$du = Pdx + Qdy \tag{15}$$

ist. Dann ist aber

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q; \tag{16}$$

wegen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

ist

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{17}$$

Wenn diese Bedingung, die Integrabilitätsbedingung, erfüllt ist, läßt sich tatsächlich u so bestimmen, daß die Gleichung (15) oder, was auf dasselbe hinauskommt, die beiden Gleichungen (16) bestehen. Dann erscheint die Differentialgleichung (B) in der Form

$$du = 0;$$

daraus folgt die Integralgleichung

$$u = C \tag{18}$$

mit der willkürlichen Konstanten C.

Die Funktion u von x und y wird folgendermaßen berechnet. Aus der ersten Gleichung (16) folgt

$$u = \int P dx + \varphi(y),$$

wobei so zu integrieren ist, als ob y konstant wäre; $\varphi(y)$ spielt die Rolle der Integrationskonstanten. Setzt man den gefundenen Ausdruck für u in die zweite Gleichung (16) ein, so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \int P dx}{\partial y} + \frac{d\varphi(y)}{dy} = Q$$

oder

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = Q - \frac{\partial \int P dx}{\partial y}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist von x unabhängig; denn die partielle Ableitung der rechten Seite nach x, d. i.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 \int P dx}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \int P dx}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

verschwindet infolge der Integrabilitätsbedingung (17). Man erhält demnach

$$\varphi(y) = \int \left[Q - \frac{\partial \int P dx}{\partial y} \right] dy$$

als Integral einer Funktion der einzigen Veränderlichen y; eine willkürliche Konstante brauchen wir für unseren Zweck nicht beizufügen. Nunmehr haben wir

$$u = \int P\,dx + \int \left[Q - \frac{\partial \int P\,dx}{\partial y} \right] dy \tag{19}$$

als Integral des vollständigen Differentials (15).

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^2)\,dy = 0 \tag{α}$$

ist exakt, da

$$\frac{\partial(3x^2 + 6xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial(6x^2y + 4y^2)}{\partial x} = 12xy$$

ist. Die Gleichung

$$du = (3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^2)\,dy$$

ist gleichbedeutend mit den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + 4y^2. \tag{β}$$

Aus der ersten folgt

$$u = \int (3x^2 + 6xy^2)\,dx = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

und durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die zweite Gleichung (β), wobei sich x weghebt,

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = 4y^2, \qquad \varphi(y) = \tfrac{4}{3}\,y^3$$

unter Weglassung der Integrationskonstanten. Demnach ist

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + \tfrac{4}{3}\,y^3.$$

Die Differentialgleichung (α) oder $du = 0$ hat das allgemeine Integral

$$x^3 + 3x^2y^2 + \tfrac{4}{3}\,y^3 = C.$$

§ 7. Integrierender Faktor.

Die Differentialgleichung (B) ändert sich nicht wesentlich, wenn man ihre linke Seite mit einer Funktion μ von x, y multipliziert. Wenn die linke Seite der Differentialgleichung (B) kein vollständiges Differential ist, suchen wir den Faktor μ so zu bestimmen, daß die Gleichung

$$du = \mu(P\,dx + Q\,dy) \tag{20}$$

durch eine Funktion u der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y erfüllt wird. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{21}$$

erfüllt ist oder mit anderen Worten, wenn μ der partiellen Differentialgleichung

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu = 0 \tag{22}$$

genügt.

Jede Funktion μ von der Art, daß die mit μ multiplizierte linke Seite der Differentialgleichung (B) ein vollständiges Differential ist, wird integrierender Faktor oder Eulerscher Multiplikator der Differentialgleichung (B) genannt. Ist ein solcher Multiplikator bekannt, so findet man die zugehörige Funktion u durch Integration eines vollständigen Differentials vermittels Quadraturen nach der in § 6 dargestellten Methode. Die Differentialgleichung (B) geht dann über in

$$du = 0\,, \tag{23}$$

und man hat ohne weiteres die Integralgleichung

$$u = C\,. \tag{24}$$

Auf die Frage, ob immer Multiplikatoren μ vorhanden sind und wie groß deren Mannigfaltigkeit ist, wollen wir hier nicht eingehen. Im allgemeinen ist die Aufsuchung einer Funktion μ, welche der Gleichung (22) genügt, keine leichtere Aufgabe als die Lösung der Differentialgleichung (B). Man braucht allerdings nicht die allgemeinste der Differentialgleichung (22) genügende Funktion μ zu kennen, sondern nur eine solche Funktion. Es gibt wenigstens Ausnahmefälle, in denen es gelingt, einen Multiplikator μ ohne besondere Schwierigkeit zu finden.

Man kann zum Beispiel fragen, ob ein von y unabhängiger Multiplikator μ vorhanden ist. Dann ist $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, und die Gleichung (22) schreibt sich

$$\frac{d \log \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,;$$

wenn die rechte Seite von y unabhängig ist, ergibt sich durch eine Quadratur μ als Funktion von x.

So findet man für die in § 5 behandelte lineare Differentialgleichung (9)

$$dy + (P(x)\,y - Q(x))\,dx = 0$$

den Multiplikator

$$\mu = e^{\int P(x)\,dx}.$$

Man bestätigt auch ohne weiteres, daß für das Produkt

$$e^{\int P\,dx}[dy + (P\,y - Q)\,dx]$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist; denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{\int P dx} = P e^{\int P dx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{\int P dx}(Py - Q)\right] = P e^{\int P dx}.$$

Die in § 4 integrierte homogene Differentialgleichung (4)

$$dy - f\left(\frac{y}{x}\right) dx = 0$$

hat den Multiplikator

$$\mu = \frac{1}{y - x f\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Denn der Ausdruck

$$\frac{dy - f\left(\frac{y}{x}\right) dx}{y - x f\left(\frac{y}{x}\right)},$$

welcher durch die Substitution $y = xz$ in

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z - f(z)}$$

übergeht, ist das vollständige Differential der Funktion

$$\log x + \int \frac{dz}{z - f(z)},$$

die man nur gleich einer willkürlichen Konstanten $\log C$ zu setzen braucht, um die frühere Lösung der homogenen Differentialgleichung zu erhalten.

Wir wollen noch als Beispiel eine Differentialgleichung behandeln, die in keine der bisher behandelten Klassen fällt, für die sich aber ein integrierender Faktor angeben läßt.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$(xy^2 - y^3)\, dx + (1 - xy^2)\, dy = 0$$

geht durch Multiplikation mit $\mu = \frac{1}{y^2}$ in die Gleichung

$$(x - y)\, dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right) dy = 0$$

über, deren linke Seite

$$du = (x - y)\, dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right) dy$$

wegen

$$\frac{\partial(x-y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{1}{y^2}-x\right)}{\partial x} = -1$$

ein vollständiges Differential ist. Dessen Integration ergibt

$$u = \frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y}.$$

Das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist $u = C$ oder

$$x^2y - 2xy^2 - 2Cy - 2 = 0.$$

§ 8. Clairautsche Differentialgleichung.

Als d'Alembertsche Differentialgleichung bezeichnet man eine in x, y lineare Gleichung, deren Koeffizienten von

$$p = \frac{dy}{dx}$$

abhängen:

$$y = xf(p) + \varphi(p). \tag{25}$$

Indem wir die Gleichung (25) nach x differentiieren, erhalten wir die Gleichung

$$p = f(p) + [xf'(p) + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

welche, wenn

$$f(p) \neq p$$

ist, auf die Form

$$\frac{dx}{dp} + x\frac{f'(p)}{f(p)-p} + \frac{\varphi'(p)}{f(p)-p} = 0$$

gebracht werden kann. Faßt man p als unabhängige, x als abhängige Veränderliche auf, so hat man eine lineare Differentialgleichung, welche nach § 5 integriert wird. Man erhält so x als Funktion von p mit einer willkürlichen Konstanten C:

$$x = F(p, C).$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die Gleichung (25) ergibt sich auch y als Funktion von p und C:

$$y = G(p, C).$$

Damit ist eine Schar von Integralkurven der Differentialgleichung (25) unter Benutzung der Hilfsveränderlichen p dargestellt. Läßt sich p eliminieren, so ergibt sich eine Gleichung zwischen x und y mit der willkürlichen Konstanten C.

In dem Ausnahmefall $f(p) = p$ haben wir die Clairautsche Differentialgleichung

$$y = px + \varphi(p), \tag{26}$$

bei der wir auf eine neue Art von Integralen stoßen. Durch Differentiation nach x erhält man

$$p = p + [x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

oder

$$[x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung kann auf zwei Arten befriedigt werden. Entweder ist

$$\frac{dp}{dx} = 0,$$

also

$$p = C$$

konstant, so daß sich die Lösung

$$y = Cx + \varphi(C) \tag{27}$$

ergibt. Oder es ist

$$x + \varphi'(p) = 0, \tag{28}$$

also

$$x = -\varphi'(p);$$

setzt man diesen Wert von x in die Gleichung (26) ein, so erhält man

$$y = \varphi(p) - p\varphi'(p).$$

Die beiden letzten Gleichungen stellen eine Integralkurve der Differentialgleichung (26) mit der Hilfsveränderlichen p dar. Durch Elimination von p erhält man eine Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{29}$$

ohne willkürliche Konstante.

Die in x, y lineare Gleichung (27) mit der willkürlichen Konstanten C stellt eine Schar von geraden Linien dar. Die Hüllkurve dieser Geradenschar findet man, indem man die Gleichung (27) partiell nach C differentiiert und die so erhaltene Gleichung

$$x + \varphi'(C) = 0$$

mit der Gleichung (27) verbindet. So ergibt sich die Parameterdarstellung der Hüllkurve

$$x = -\varphi'(C),$$
$$y = \varphi(C) - C\varphi'(C);$$

hieraus erhält man durch Elimination von C als Gleichung der Hüllkurve die Gleichung $F(x, y) = 0$, welche oben durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen (26) und (28) gefunden wurde. Die Gleichung (29) enthält keine willkürliche Konstante, sie geht aber auch nicht aus dem allgemeinen Integral (27) durch Einsetzung eines speziellen Wertes für die Konstante C hervor. Das Integral (29) ist hiernach kein partikuläres Integral; man bezeichnet die zum allgemeinen Integral (27) noch hinzukommende Lösung (29) als singuläre Lösung. Geometrisch stellt die singuläre Lösung die Hüllkurve der durch das allgemeine Integral dargestellten Geradenschar dar.

Beispiel. Gesucht ist die Kurve, deren Tangente mit den Koordinatenachsen ein Dreieck von konstanter Fläche $\frac{1}{2}\,a^2$ bildet.

Die Tangente im Kurvenpunkt (x, y) hat die Gleichung

$$\eta - y = p(\xi - x),$$

also die Achsenabschnitte

$$-\frac{1}{p}(y - px), \quad y - px,$$

deren Produkt gleich a^2 sein soll. So ergibt sich die Clairautsche Differentialgleichung

$$y = px + a\sqrt{-p}.$$

Ihr allgemeines Integral

$$y = Cx + a\sqrt{-C}$$

stellt die Geraden dar, welche mit den Achsen Dreiecke von der Fläche $\frac{1}{2}a^2$ bilden. Die Hüllkurve dieser Geradenschar, die gleichseitige Hyperbel

$$xy = \frac{a^2}{4},$$

stellt die singuläre Lösung der Differentialgleichung dar.

§ 9. Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich auf Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen lassen.

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung enthält im allgemeinen die vier Größen

$$x, \; y, \; \frac{dy}{dx}, \; \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Sie läßt sich auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen, wenn entweder x oder y in der Gleichung nicht vorkommt.

1. Wenn y fehlt, wenn also die Gleichung die Form

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \tag{30}$$

hat, setzt man

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}. \tag{31}$$

Man hat dann

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0, \tag{32}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und p. Im allgemeinen ist die Differentialgleichung (32) nach den bisherigen Methoden nicht lösbar. Wenn es aber gelingt, ihr allgemeines Integral in der Form

$$p = \varphi(x, C)$$

zu finden, wo C eine willkürliche Konstante bedeutet, so hat man

$$dy = \varphi(x, C)\, dx;$$

daraus folgt

$$y = \int \varphi(x, C)\, dx + C',$$

wo C' eine zweite willkürliche Konstante darstellt.

Wenn die Differentialgleichung zweiter Ordnung auch x nicht enthält, wenn sie also von der Form

$$F\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

ist, kommt man auf die Differentialgleichung erster Ordnung

$$F\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

oder

$$\frac{dp}{dx} = f(p),$$

in der sich die Veränderlichen trennen lassen. Man hat

$$dx = \frac{dp}{f(p)},$$

$$x = \int \frac{dp}{f(p)} + C.$$

Statt diese Gleichung nach p aufzulösen, kann man auch y durch p ausdrücken. Man hat

$$dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{f(p)},$$

$$y = \int \frac{p\,dp}{f(p)} + C'.$$

2. Wenn in der Differentialgleichung zweiter Ordnung x fehlt, wenn also eine Gleichung von der Form

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \tag{33}$$

vorliegt, setzt man

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}. \tag{34}$$

Man erhält

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0, \tag{35}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y und p. Wenn es gelingt, das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung in der Form

$$p = \varphi(y, C)$$

mit der willkürlichen Konstanten C zu finden, bleibt noch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C)$$

durch Trennung der Veränderlichen zu integrieren. Es ist

$$dx = \frac{dy}{\varphi(y, C)};$$

daraus folgt

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C)} + C',$$

wo C' eine zweite willkürliche Konstante darstellt.

Wenn die Differentialgleichung zweiter Ordnung $\frac{dy}{dx}$ nicht enthält, sondern nur y und $\frac{d^2y}{dx^2}$, sei sie in der Form geschrieben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y).$$

In der Differentialgleichung erster Ordnung

$$p\frac{dp}{dy} = f(y)$$

trennt man die Veränderlichen. Aus

$$p\,dp = f(y)\,dy$$

erhält man durch Integration

$$p^2 = 2\int f(y)\,dy + C$$

und hieraus

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int f(y)\,dy + C}.$$

Die Trennung der Veränderlichen x, y ergibt

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C}}$$

und eine nochmalige Integration

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C}} + C'.$$

Beispiel. Die Differentialgleichung der Kettenlinie

$$a\,\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

geht, wenn man

$$\frac{dy}{dx} = p$$

setzt, in die Differentialgleichung erster Ordnung

$$a\,\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}$$

über. Durch Trennung der Veränderlichen erhält man

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a}$$

und durch beiderseitige Integration[1])

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,p = \frac{x + C}{a},$$

wo C eine willkürliche Konstante ist. Daraus folgt

$$p = \frac{dy}{dx} = \mathfrak{Sin}\,\frac{x + C}{a}$$

und hieraus durch nochmalige Integration

$$y + C' = a\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x + C}{a}$$

---

[1]) Wir benutzen die Hyperbelfunktionen

$$\mathfrak{Cof}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathfrak{Sin}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und deren Umkehrungen $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x$.

mit der zweiten willkürlichen Konstanten C'. Alle diese Kurven ergeben sich durch Verschiebung der Kurve

$$y = a \operatorname{Cof} \frac{x}{a}.$$

Beispiel. Die Kurven, deren Krümmungsradius der Länge der Normale proportional ist, genügen der Differentialgleichung

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = ny\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

oder

$$ny\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

welche, wenn man

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

setzt, in

$$nyp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2$$

übergeht. Die Integration ergibt

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}$$

und eine nochmalige Integration

$$x - C' = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}},$$

wo C und C' willkürliche Konstante sind.

Für $n = 1$ hat man die Kettenlinie

$$y = C \operatorname{Cof} \frac{x - C'}{C}$$

und für $n = -1$ den Kreis

$$(x - C')^2 + y^2 = C^2.$$

§ 10. Differentialgleichung zweiter Ordnung und System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

geht, wenn man

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$$

setzt, in ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\text{(36)} \qquad \frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = f(x, y, z)$$

mit der unabhängigen Veränderlichen x und den abhängigen Veränderlichen y, z über.

Wir betrachten das allgemeinere Differentialgleichungssystem für die beiden Funktionen y, z der Veränderlichen x:

$$\text{(D)} \qquad \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z).$$

Eine Lösung $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ von (D) stellt sich, wenn man x, y, z als rechtwinklige Koordinaten eines Raumpunktes betrachtet, geometrisch als Raumkurve dar. Man kann diese räumliche Integralkurve dadurch darstellen, daß man zwei Projektionen zeichnet, nämlich die Kurve $y = \varphi(x)$ in der xy-Ebene und die Kurve $z = \psi(x)$ in der xz-Ebene. Das Differentialgleichungssystem (D) ordnet dem Raumpunkt x, y, z eine Richtung $y' = f_1(x, y, z)$ in der xy-Projektion und eine Richtung $z' = f_2(x, y, z)$ in der xz-Projektion, also auch eine Richtung im Raume zu. Eine Betrachtung ähnlich der in § 2 für die Differentialgleichung (A) angestellten führt zu der Vermutung, daß durch einen gegebenen Raumpunkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ eine bestimmte räumliche Integralkurve von (D) geht. In § 12 wird unter gewissen Voraussetzungen bewiesen, daß das System (D) eine und nur eine Lösung $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ besitzt, welche die Anfangsbedingung $x = a$, $y = b$, $z = c$ erfüllt. Wenn man bei festgehaltenem a die Werte von b und c ändert, erhält man eine zweifache Schar von räumlichen Integralkurven. Dabei spielen b und c die Rolle der willkürlichen Konstanten (d. h. dieselbe Rolle wie in § 9 die Konstanten C und C').

Wenden wir diese Betrachtungen auf das Differentialgleichungssystem (36) an, so sehen wir, daß die Differentialgleichung zweiter Ordnung (C) unter gewissen Voraussetzungen eine und nur eine Lösung

$y = \varphi(x)$ besitzt, welche für $x = a$ den vorgeschriebenen Wert b annimmt, während die Ableitung y' den ebenfalls vorgeschriebenen Wert b' erhält. Die Differentialgleichung (C) hat also eine Integralkurve $y = \varphi(x)$, welche durch den gegebenen Punkt $x = a$, $y = b$ geht und in diesem Punkt die gegebene Tangentenrichtung $y' = b'$ besitzt.

Wir schreiben die Differentialgleichung zweiter Ordnung, indem wir die unabhängige Veränderliche mit t, die abhängige Veränderliche mit s bezeichnen, in der Form

$$\text{(C')} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = f\left(t,\ s,\ \frac{ds}{dt}\right).$$

Ist s die Abszisse eines geradlinig bewegten Punktes zur Zeit t, so ist $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit und $\frac{d^2s}{dt^2}$ die Beschleunigung; die rechte Seite der Gleichung ist die durch die Masse des bewegten Punktes dividierte Kraft. Wenn man also die Kraft in ihrer Abhängigkeit von Zeit, Ort und Geschwindigkeit sowie die Masse kennt, kann man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ansetzen. Ist die Anfangslage $s = s_0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v = v_0$ des bewegten Punktes gegeben, so hat man eine Funktion s von t zu bestimmen, welche der Differentialgleichung (C') genügt und die Anfangsbedingung erfüllt: $t = 0$, $s = s_0$, $\frac{ds}{dt} = v_0$. Es ist also hier dieselbe Aufgabe zu lösen, welche vorhin in geometrischer Deutung gestellt war.

Zweites Kapitel.

Existenzbeweise, Methode der schrittweisen Annäherung.

§ 11. Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir betrachten die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

zwischen den reellen Veränderlichen x, y. Daß die Differentialgleichung unter gewissen Voraussetzungen über die Funktion $f(x, y)$ Lösungen besitzt, beweisen wir nach der Methode der schrittweisen Annäherung (der sukzessiven Approximationen), die in der angewandten Mathematik vielfach zur angenäherten Lösung von Differentialgleichungen benutzt worden ist und eine strenge Ausbildung als Beweismittel der reinen Mathematik namentlich durch Picard erfahren hat[1]).

Die Funktion $f(x, y)$ sei in dem Rechteck

$$|x - a| \leqq h, \qquad |y - b| \leqq H$$

mit dem Mittelpunkt a, b und den Seitenlängen $2h, 2H$ stetig; für alle Stellen x, y dieses Rechtecks sei

$$|f(x, y)| \leqq M;$$

ferner sei eine positive Größe K so vorhanden, daß

$$\text{(1)} \qquad |f(x, Y) - f(x, y)| \leqq K\,|Y - y|$$

ist, wenn x, y und x, Y zwei beliebige Stellen des obigen Rechtecks mit derselben Abszisse x sind. Die Lipschitzsche Bedingung (1) ist sicher dann erfüllt, wenn in dem Rechteck eine stetige partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ vorhanden und

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqq K$$

---

[1]) Im dritten Kapitel (§ 18) erscheint sie als Methode zur angenäherten Integration.

ist; dann ist nämlich

$$f(x, Y) - f(x, y) = \int_y^Y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dy,$$

woraus die Bedingung (1) folgt.

Wir bezeichnen die kleinere der beiden positiven Größen

$$h, \quad \frac{H}{M}$$

mit ϱ und beschränken die reelle Veränderliche x auf das Intervall $|x - a| \leqq \varrho$.

Um eine Lösung der Differentialgleichung (A) zu bestimmen, welche für $x = a$ den Wert $y = b$ annimmt, wählen wir zunächst irgendeine stetige Funktion y_0 von x, welche für $x = a$ den Wert $y_0 = b$ annimmt und eine stetige (oder stückweise stetige) Ableitung $\frac{dy_0}{dx}$ besitzt. Für $|x - a| \leqq \varrho$ sei $|y_0 - b| \leqq H$ und

$$\frac{dy_0}{dx} = f(x, y_0) + \vartheta, \tag{2}$$

wo $|\vartheta| \leqq \varepsilon$ ist und ε eine positive Konstante bedeutet. (Die Funktion y_0 genügt der Differentialgleichung (A) bis auf einen Fehler, dessen absoluter Betrag höchstens gleich ε ist.) Dann ist

$$y_0 - b = \int_a^x f(x, y_0)\, dx + \int_a^x \vartheta\, dx. \tag{3}$$

Es ist zulässig, für y_0 die Konstante b zu setzen.

Wir bestimmen die Funktion y_1 von x aus der Differentialgleichung

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, y_0),$$

deren rechte Seite eine bekannte Funktion von x ist, mit der Anfangsbedingung $x = a$, $y_1 = b$; wir erhalten

$$y_1 - b = \int_a^x f(x, y_0)\, dx.$$

Aus der Differentialgleichung

$$\frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1)$$

mit der Anfangsbedingung $x = a$, $y_2 = b$ ergibt sich

$$y_2 - b = \int_a^x f(x, y_1)\, dx.$$

Allgemein ergibt sich y_n aus der Differentialgleichung

$$\frac{dy_n}{dx} = f(x, y_{n-1}) \tag{4}$$

mit der Anfangsbedingung $x = a$, $y_n = b$ in der Form

$$y_n - b = \int_a^x f(x, y_{n-1})\, dx. \tag{5}$$

Wir weisen nach, daß, wenn n ins Unendliche wächst, y_n einem Grenzwert y zustrebt und daß dieser Grenzwert y im Intervall $|x - a| \leqq \varrho$ eine stetige Funktion von x ist, welche der Differentialgleichung (A) genügt.

Für $|x - a| \leqq \varrho$ ist

$$|f(x, y_0)| \leqq M,$$

also

$$|y_1 - b| \leqq M|x - a| \leqq M\varrho \leqq H.$$

Daher ist auch $|f(x, y_1)| \leqq M$; daraus folgt

$$|y_2 - b| \leqq H.$$

So fortfahrend, findet man für jeden Wert von n

$$|y_n - b| \leqq H. \tag{6}$$

Aus den Integralausdrücken für y_0 und y_1 folgt

$$y_1 - y_0 = -\int_a^x \vartheta\, dx,$$

also

$$|y_1 - y_0| \leqq \varepsilon |x - a|.$$

Wenn man von dem Ausdruck (5) für $y_n - b$ den entsprechenden Ausdruck

$$y_{n-1} - b = \int_a^x f(x, y_{n-2})\, dx$$

subtrahiert, erhält man

$$y_n - y_{n-1} = \int_a^x [f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})]\, dx, \tag{7}$$

also, da

$$|f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})| \leqq K|y_{n-1} - y_{n-2}|$$

ist,

$$|y_n - y_{n-1}| \leqq K \int_0^{|x-a|} |y_{n-1} - y_{n-2}|\, d|x - a|.$$

Für $n = 2$ hat man

$$|y_2 - y_1| \leqq K \int_0^{|x-a|} |y_1 - y_0| \, d|x-a| \leqq K \int_0^{|x-a|} \varepsilon |x-a| \, d|x-a| = \varepsilon \frac{K|x-a|^2}{2!},$$

für $n = 3$

$$|y_3 - y_2| \leqq K \int_0^{|x-a|} |y_2 - y_1| \, d|x-a| \leqq K \int_0^{|x-a|} \varepsilon \frac{K|x-a|^2}{2!} d|x-a|$$

$$= \varepsilon \frac{K^2|x-a|^3}{3!}.$$

So fortfahrend, findet man

$$|y_n - y_{n-1}| \leqq \varepsilon \frac{K^{n-1}|x-a|^n}{n!} \leqq \varepsilon \frac{K^{n-1}\varrho^n}{n!}. \tag{8}$$

Da die Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$\varepsilon \frac{K^{n-1}\varrho^n}{n!}$$

konvergiert, so ist die Reihe

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots \tag{9}$$

für $|x-a| \leqq \varrho$ unbedingt und gleichmäßig konvergent und stellt demnach eine stetige Funktion von x dar.

Die Funktion

$$y = \lim_{n \to \infty} [y_0 + (y_1 - y_0) + \cdots + (y_n - y_{n-1})] = \lim_{n \to \infty} y_n \tag{10}$$

genügt der Differentialgleichung (A). Denn aus

$$y_n = b + \int_a^x f(x, y_{n-1}) \, dx$$

folgt, wenn man n unendlich groß werden läßt und beachtet, daß y_{n-1} für $|x-a| \leqq \varrho$ gleichmäßig dem Grenzwert y zustrebt:

$$y = b + \int_a^x f(x, y) \, dx.$$

Hieraus erhält man durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Hier ist $f(x, y)$ und damit auch $\frac{dy}{dx}$ eine stetige Funktion von x. (Dies gilt auch dann, wenn $\frac{dy_0}{dx}$ nur stückweise stetig ist. In § 18 kann als geometrische Darstellung von y_0 eine gebrochene Linie erscheinen.)

Wir haben eine Funktion y von x gefunden, welche für $x=a$ den Wert $y=b$ annimmt und der Differentialgleichung (A) genügt. Wir zeigen, daß die Differentialgleichung (A) keine weitere Lösung mit der Anfangsbedingung $x=a$, $y=b$ besitzt.

Wir nehmen an, Y sei eine in dem Intervall $a \leqq x \leqq a+\tau$ (wo $0<\tau \leqq \varrho$ ist) nebst der ersten Ableitung stetige Funktion von x, welche ebenfalls die Bedingung $Y=b$ für $x=a$ und die Differentialgleichung

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y)$$

erfüllt. Dann ist

$$\frac{d(Y-y)}{dx} = f(x, Y) - f(x, y),$$

also

$$Y - y = \int_a^x [f(x, Y) - f(x, y)]\, dx$$

und mit Rücksicht auf die Lipschitzsche Bedingung (1)

$$|Y - y| \leqq K \int_a^x |Y - y|\, dx.$$

Wenn μ der größte Wert von $|Y-y|$ in dem Intervall $a \leqq x \leqq a+\tau$ ist, hat man

$$|Y - y| \leqq K \int_a^x \mu\, dx = \mu K (x-a),$$

$$|Y - y| \leqq K \int_a^x \mu K (x-a)\, dx = \mu \frac{K^2 (x-a)^2}{2!}$$

und, wenn man so fortfährt, für jede ganze positive Zahl n

$$|Y - y| \leqq \mu \frac{K^n (x-a)^n}{n!} \leqq \mu \frac{(K\tau)^n}{n!}.$$

Die rechte Seite wird beliebig klein, wenn man n hinreichend groß annimmt. Daher ist die von n unabhängige linke Seite $|Y-y|$ gleich Null oder $Y=y$.

Wir können nunmehr den folgenden Satz aussprechen:

In der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{A}$$

sei $f(x, y)$ eine stetige Funktion der auf das Gebiet

$$|x-a| \leqq h, \qquad |y-b| \leqq H$$

beschränkten reellen Veränderlichen x, y. Sind x, y und x, Y beliebige Stellen dieses Gebietes mit derselben Abszisse x, so sei

$$|f(x, y)| \leqq M$$

und

$$|f(x, Y) - f(x, y)| \leqq K|Y - y|.$$

Ist ϱ die kleinere der beiden Größen

$$h, \quad \frac{H}{M},$$

so wird die Differentialgleichung (A) durch eine und nur eine in dem Intervall $|x - a| \leqq \varrho$ nebst ihrer ersten Ableitung stetige Funktion y von x befriedigt, welche für $x = a$ den Wert $y = b$ annimmt[1]).

Die Methode der schrittweisen Annäherung gründete sich auf eine Ausgangsfunktion y_0, deren Eigenschaften auf S. 26 angegeben sind. Wir wollen den Unterschied zwischen dieser Ausgangsfunktion y_0 und der durch die Anfangsbedingung $x = a$, $y = b$ bestimmten Lösung y der Differentialgleichung (A) abschätzen.

Es ist für $|x - a| \leqq \varrho$ nach (9) und (8)

$$y - y_0 = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots,$$

$$|y_1 - y_0| \leqq \varepsilon \frac{|x - a|}{1!}, \quad |y_2 - y_1| \leqq \varepsilon \frac{K|x - a|^2}{2!}, \ldots,$$

also

$$|y - y_0| \leqq \frac{\varepsilon}{K}\left[\frac{K|x - a|}{1!} + \frac{K^2|x - a|^2}{2!} + \cdots\right] = \frac{\varepsilon}{K}(e^{K|x-a|} - 1).$$

Wir können demnach sagen: Es ist

$$|y - y_0| \leqq \frac{\varepsilon}{K}(e^{K|x-a|} - 1), \tag{11}$$

wenn die beiden Funktionen y und y_0 für $x = a$ den Wert b annehmen, während y der Differentialgleichung (A) genügt, y_0 aber nur bis auf einen Fehler, dessen absoluter Betrag in dem Intervall $|x - a| \leqq \varrho$ höchstens gleich ε ist.

Anmerkung. Ähnlich läßt sich der Fehler abschätzen, den man begeht, wenn man die Lösung y der Differentialgleichung (A) durch die

[1]) Ist die Funktion $f(x, y)$ stetig, ist aber die Lipschitzsche Bedingung nicht erfüllt, so läßt sich immer noch beweisen, daß mindestens eine Lösung der Differentialgleichung die Anfangsbedingung $x = a$, $y = b$ erfüllt; es kann aber dann mehr als eine solche Lösung vorhanden sein.

Näherungsfunktion y_n ersetzt. Wenn man die absoluten Beträge der einzelnen Glieder der Reihe

$$y - y_n = (y_{n+1} - y_n) + (y_{n+2} - y_{n+1}) + \cdots$$

nach Formel (8) abschätzt, findet man

$$|y - y_n| \leqq \frac{\varepsilon}{K} \frac{|x-a|^n}{n!} (e^{K|x-a|} - 1). \tag{12}$$

§ 12. System von Differentialgleichungen.

Die in § 11 benutzte Methode zum Beweis der Existenz der Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung läßt sich ohne weiteres auf ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unabhängigen Veränderlichen x und zwei abhängigen Veränderlichen y, z übertragen:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z). \end{cases}$$

Die Funktionen f_1 und f_2 der reellen Veränderlichen x, y, z seien in dem Gebiet

$$|x - a| \leqq h, \qquad |y - b| \leqq H, \qquad |z - c| \leqq H$$

stetig; für alle Stellen x, y, z dieses Gebietes sei

$$|f_i(x, y, z)| \leqq M \qquad (i = 1, 2);$$

ferner sei

$$|f_i(x, Y, Z) - f_i(x, y, z)| \leqq K(|Y - y| + |Z - z|) \quad (i = 1, 2), \tag{13}$$

wenn x, y, z und x, Y, Z zwei beliebige Stellen des angegebenen Gebietes mit derselben x-Koordinate sind. Wenn in diesem Gebiet stetige partielle Ableitungen $\dfrac{\partial f_i}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial z}$ $(i = 1, 2)$ vorhanden sind, deren absolute Beträge den Wert K nicht überschreiten, ist die Lipschitzsche Bedingung (13) erfüllt. Die kleinere der beiden positiven Größen

$$h, \quad \frac{H}{M}$$

wird wieder mit ϱ bezeichnet und die reelle Veränderliche x auf das Intervall $|x - a| \leqq \varrho$ beschränkt.

Um Funktionen y, z von x zu erhalten, welche den Differentialgleichungen (B) genügen und die Anfangsbedingung $x = a$, $y = b$, $z = c$

erfüllen, gehen wir von irgendwelchen stetigen Funktionen y_0, z_0 mit stetiger (oder stückweise stetiger) erster Ableitung aus, welche die Anfangsbedingung $x = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$ erfüllen. Für $|x - a| \leqq \varrho$ sei $|y_0 - b| \leqq H$, $|z_0 - c| \leqq H$ und

$$(14)\quad \frac{dy_0}{dx} = f_1(x, y_0, z_0) + \vartheta_1,\ \frac{dz_0}{dx} = f_2(x, y_0, z_0) + \vartheta_2;\ |\vartheta_1| \leqq \varepsilon,\ |\vartheta_2| \leqq \varepsilon.$$

Man könnte für y_0 die Konstante b, für z_0 die Konstante c wählen.

Wir bestimmen, unter n nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, ... verstehend, die Funktionen y_n, z_n von x aus den Differentialgleichungen

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_n}{dx} = f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1}), \\ \dfrac{dz_n}{dx} = f_2(x, y_{n-1}, z_{n-1}) \end{cases}$$

mit der Anfangsbedingung $x = a$, $y_n = b$, $z_n = c$.

Wie in § 11 beweist man, daß für $|x - a| \leqq \varrho$

$$(17)\qquad |y_n - b| \leqq H, \qquad |z_n - c| \leqq H$$

und

$$(18)\quad |y_n - y_{n-1}| \leqq \varepsilon \frac{(2K)^{n-1}|x - a|^n}{n!},\quad |z_n - z_{n-1}| \leqq \varepsilon \frac{(2K)^{n-1}|x - a|^n}{n!}$$

ist. Die Reihen

$$(19)\quad y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n - y_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} y_n,\ z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(z_n - z_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} z_n$$

sind also für $|x - a| \leqq \varrho$ unbedingt und gleichmäßig konvergent. Daß die so bestimmten Funktionen y, z den Differentialgleichungen (B) genügen, ergibt sich wie in § 11. Wie dort sieht man auch, daß es andere Funktionen y, z von x, welche für $x = a$ die Werte $y = b$, $z = c$ annehmen und den Differentialgleichungen (B) genügen, nicht geben kann.

Die Differenzen $y - y_0$, $z - z_0$ lassen sich wie in § 11 abschätzen. Man hat nur K durch $2K$ zu ersetzen. Man findet für $|x - a| \leqq \varrho$

$$(15)\quad |y - y_0| \leqq \frac{\varepsilon}{2K}(e^{2K|x-a|} - 1),\quad |z - z_0| \leqq \frac{\varepsilon}{2K}(e^{2K|x-a|} - 1),$$

wenn die Funktionen y, z den Differentialgleichungen (B) genügen, die Funktionen y_0, z_0 aber nur bis auf Fehler vom absoluten Betrage $\leqq \varepsilon$, und wenn für $x = a$ $y = y_0 = b$, $z = z_0 = c$ ist.

Tritt an Stelle des Intervalls $|x - a| \leqq h$ oder $a - h \leqq x \leqq a + h$ der reellen Veränderlichen x das Intervall $a \leqq x \leqq a + h$, so sind die Funktionen y, z im Intervall $a \leqq x \leqq a + \varrho$ dargestellt.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, daß

$$f_i(x, y, z) = A_i(x)y + B_i(x)z + C_i(x) \qquad (i = 1, 2) \tag{20}$$

eine lineare Funktion von y und z ist, deren Koeffizienten $A_i(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$ in dem Intervall $|x - a| \leqq h$ stetig sind.

Die Differentialgleichungen

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = A_1(x)y + B_1(x)z + C_1(x), \\ \dfrac{dz}{dx} = A_2(x)y + B_2(x)z + C_2(x), \end{cases}$$

welche in bezug auf die abhängigen Veränderlichen y, z und deren Differentialquotienten $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$ linear sind, bilden ein System linearer Differentialgleichungen.

Indem wir die Methode der schrittweisen Annäherung wie bisher anwenden, erhalten wir Funktionen y und z von x, welche das Differentialgleichungssystem (C) befriedigen und für $x = a$ die vorgeschriebenen Werte $y = b$ und $z = c$ annehmen. Wir zeigen, daß diese Funktionen jetzt für $|x - a| \leqq h$ dargestellt sind, daß also $\varrho = h$ gesetzt werden kann.

Die Annahme, daß $|x - a| \leqq \dfrac{H}{M}$ sein solle, wurde oben nur gemacht, damit $|y_n - b| \leqq H$, $|z_n - c| \leqq H$ wurde, d. h. damit die Werte $y = y_n$, $z = z_n$ dem Stetigkeitsgebiet der Funktionen $f_i(x, y, z)$ angehörten. Da jetzt $f_i(x, y, z)$ für alle endlichen Werte von y und z stetig ist, wenn nur $|x - a| \leqq h$ bleibt, so kann ϱ gleich h angenommen werden.

Der Beweis der Konvergenz der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (z_n - z_{n-1})$$

wird wie oben geführt. Es sei jetzt für $|x - a| \leqq h$

$$|A_i(x)| \leqq K, \qquad |B_i(x)| \leqq K;$$

dann ist

$$\begin{aligned} &|f_i(x, y_n, z_n) - f_i(x, y_{n-1}, z_{n-1})| \\ &= |A_i(x)(y_n - y_{n-1}) + B_i(x)(z_n - z_{n-1})| \\ &\leqq K(|y_n - y_{n-1}| + |z_n - z_{n-1}|). \end{aligned}$$

Obere Schranken für die absoluten Beträge von $y_n - y_{n-1}$ und $z_n - z_{n-1}$ ergeben sich wie oben.

Wir können, indem wir zu n abhängigen Veränderlichen übergehen, den folgenden Satz aussprechen:

In dem Differentialgleichungssystem

$$(D) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

seien $f_1, \ldots, f_n$ stetige Funktionen der auf das Gebiet

$$|x - a| \leqq h, |y_1 - b_1| \leqq H, \ldots, |y_n - b_n| \leqq H$$

beschränkten reellen Veränderlichen $x, y_1, \ldots, y_n$. Sind $x, y_1, \ldots, y_n$ und $x, Y_1, \ldots, Y_n$ beliebige Stellen dieses Gebietes mit derselben Abszisse x, so sei

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq M,$$

$$|f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq K\left(|Y_1 - y_1| + \cdots + |Y_n - y_n|\right).$$

Ist ϱ die kleinere der beiden Größen

$$h, \frac{H}{M},$$

so haben die Differentialgleichungen (D) eine und nur eine Lösung

$$y_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

wo $\varphi_i(x)$ eine in dem Intervall $|x - a| \leqq \varrho$ nebst ihrer ersten Ableitung stetige Funktion darstellt, welche für $x = a$ den Wert b_i annimmt.

Weiter gilt der Satz:

Genügen die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ den Differentialgleichungen (D), die Funktionen $y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ aber nur bis auf Fehler, deren absoluter Betrag höchstens gleich ε ist, d. h.

$$\frac{dy_i^{(0)}}{dx} = f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) + \vartheta_i, |\vartheta_i| \leqq \varepsilon,$$

und ist für $x = a$ $y_i = y_i^{(0)} = b_i$, so ist im Intervall $|x - a| \leqq \varrho$

$$\left|y_i - y_i^{(0)}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{nK}\left(e^{nK|x-a|} - 1\right) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Für lineare Differentialgleichungen gilt der folgende Satz:

Das System linearer Differentialgleichungen

$$(E) \qquad \frac{dy_i}{dx} = A_{i1}(x)y_1 + \cdots + A_{in}(x)y_n + B_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

dessen Koeffizienten $A_{i1}(x), \ldots, A_{in}(x), B_i(x)$ im Intervall $|x - a| \leqq h$ stetig sind, hat eine und nur eine in demselben

Intervall stetige und mit stetigen ersten Ableitungen versehene Lösung $y_1, \ldots, y_n$, welche die Anfangsbedingung $x = a$, $y_1 = b_1, \ldots, y_n = b_n$ erfüllt, wo $b_1, \ldots, b_n$ vorgeschrieben sind.

Die Existenz der Integrale einer Differentialgleichung höherer Ordnung ergibt sich durch Zurückführung dieser Differentialgleichung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehreren abhängigen Veränderlichen (vgl. § 10).

§ 13. Singuläre Lösungen.

Es sei

(F) $$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung, welche nicht nach dem Differentialquotienten $y' = \frac{dy}{dx}$ aufgelöst ist. Die Funktion $F(x, y, y')$ sei nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung nach x, y und y' in der Umgebung von $x = a$, $y = b$, $y' = b'$ stetig; für $x = a$, $y = b$, $y' = b'$ soll die Funktion F verschwinden, aber die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial y'}$ von Null verschieden sein. Dann läßt sich nach dem Satze über implizite Funktionen die Gleichung (F) nach dem Differentialquotienten in der folgenden Form auflösen:

(21) $$\frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

die Funktion $f(x, y)$ nimmt für $x = a$, $y = b$ den Wert $f(a, b) = b'$ an und ist in der Umgebung von $x = a$, $y = b$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung nach x und nach y stetig, sie erfüllt also die Lipschitzsche Bedingung.

Die Differentialgleichung (21) wird nach § 11 durch eine Funktion $y = \varphi(x)$ befriedigt, welche für $x = a$ den Wert $y = b$ annimmt und nebst ihrer Ableitung $\varphi'(x)$ in der Umgebung von $x = a$ stetig ist. Diese Funktion $y = \varphi(x)$ stellt die einzige Lösung der Differentialgleichung (21) dar, welche so beschaffen ist, daß für $x = a$ $y = b$, $y' = b'$ ist.

Wenn sich somit der in § 11 bewiesene Existenzsatz auch auf die nicht nach y' aufgelöste Differentialgleichung (F) anwenden läßt, so sind doch Lösungen der Differentialgleichung (F) denkbar, welche durch diesen Existenzsatz nicht geliefert werden. Es kommt nämlich ausnahmsweise vor, daß die Differentialgleichung (F) eine Lösung $y = \varphi(x)$ besitzt, welche zugleich auch die Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0$$

befriedigt. Es sei $x = a$ ein beliebiger Wert und $\varphi(a) = b$, $\varphi'(a) = b'$; für das Wertsystem $x = a$, $y = b$, $y' = b'$ verschwinden die Funktionen F und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ gleichzeitig. Es ist daher nicht möglich, die Lösung $y = \varphi(x)$ auf dem oben angegebenen Wege durch Auflösung der Gleichung (F) nach y' und Anwendung des Existenzsatzes zu erhalten.

Durch Elimination von y' zwischen den Gleichungen

$$F(x, y, y') = 0\,, \quad \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \tag{22}$$

erhält man die Diskriminantengleichung

$$\Delta(x, y) = 0\,. \tag{23}$$

Ist $F(x, y, y')$ eine ganze rationale Funktion von x, y, y', also (F) eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung, so kann man

$$F(x, y, y') = A_0 y'^n + A_1 y'^{n-1} + \cdots + A_{n-1} y' + A_n$$

setzen, wo $A_0, A_1, \ldots$ ganze rationale Funktionen von x, y sind. Durch Elimination von y' zwischen den ganzen rationalen Funktionen F und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ erhält man die Gleichung $\Delta(x, y) = 0$, wo Δ, die Diskriminante der ganzen rationalen Funktion F von y', eine ganze rationale Funktion von x, y ist.

Eine Funktion y von x, welche der Diskriminantengleichung (23) genügt, genügt im allgemeinen der Differentialgleichung (F) nicht. Wenn eine Lösung der Diskriminantengleichung (23) ausnahmsweise auch der Differentialgleichung (F) genügt, wird sie als singuläre Lösung der Differentialgleichung bezeichnet. Aus der ersten der beiden Gleichungen (22), welche von einer singulären Lösung befriedigt werden, folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} = 0;$$

hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung der zweiten Gleichung (22) die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0\,, \tag{24}$$

welcher eine singuläre Lösung ebenfalls genügen muß. Die drei Gleichungen (22) und (24) können im allgemeinen nicht zusammen bestehen; die Differentialgleichung (F) besitzt im allgemeinen keine singuläre Lösung.

Für die in § 8 behandelte Clairautsche Differentialgleichung sind die Gleichungen (22), wenn die dortige Bezeichnung $y' = p$ beibehalten wird,

$$y = px + \varphi(p), \quad 0 = 1 + \varphi'(p);$$

die dortige Gleichung $F(x, y) = 0$ ist die Diskriminantengleichung; die Gleichung (24) ist identisch erfüllt. Die singuläre Lösung $F(x, y) = 0$ war dort die Hüllkurve der durch das allgemeine Integral

$$y = Cx + \varphi(C)$$

dargestellten Geradenschar.

Wenn die durch das allgemeine Integral

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

der Differentialgleichung (F) dargestellte Kurvenschar eine Hüllkurve besitzt, so bildet diese Hüllkurve eine singuläre Lösung. Zunächst genügt die Hüllkurve der Differentialgleichung, denn die Hüllkurve wird in jedem ihrer Punkte x, y von einer Kurve der Schar berührt; die Tangentenrichtung y' der Hüllkurve ist zugleich die Tangentenrichtung der berührenden Kurve der Schar; da für die auf die letztere Kurve bezogenen Größen x, y, y' die Gleichung $F(x, y, y') = 0$ gilt, so gilt diese auch für einen Punkt x, y und die zugehörige Tangentenrichtung y' der Hüllkurve. Durch einen beliebigen Punkt x, y der Hüllkurve gehen zwei Kurven mit demselben y', nämlich die Hüllkurve selbst und die sie berührende Kurve der Schar; dies wäre nicht möglich, wenn die partielle Ableitung von F nach y' von Null verschieden wäre. Daher genügt die Hüllkurve den beiden Gleichungen $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$, d. h. sie bildet eine singuläre Lösung.

Wir behandeln ein Beispiel, in welchem die Diskriminantengleichung $\Delta(x, y) = 0$ keine singuläre Lösung darstellt. Wenn man aus der Differentialgleichung

$$F = 4y'^2 - 9x = 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 8y' = 0$$

y' eliminiert, erhält man die Diskriminantengleichung $x = 0$, die der Differentialgleichung nicht genügt. Durch Integration der Differentialgleichung

$$y' = \pm \tfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

erhält man die Schar der semikubischen Parabeln

$$y = \pm x^{\frac{3}{2}} + C,$$

deren Spitzen $x = 0$, $y = C$ auf der Geraden $x = 0$ liegen.

Daß die Diskriminantengleichung im allgemeinen den Ort der Spitzen der Integralkurven darstellt, soll hier nicht gezeigt werden.

Im folgenden Beispiel stellt die Diskriminantengleichung eine singuläre Lösung dar. Durch Elimination von y' aus der Differentialgleichung

$$F = xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2xy' - 2y = 0$$

ergibt sich die Diskriminantengleichung $y^2 = 4x^2$. Die beiden Geraden $y = \pm 2x$ genügen der Differentialgleichung; sie sind die Einhüllenden der Parabelschar $x^2 = c(y - c)$, welche das allgemeine Integral darstellt.

Auf die singulären Lösungen von Systemen von Differentialgleichungen oder von Differentialgleichungen höherer Ordnung soll hier nicht eingegangen werden.

Drittes Kapitel.

Numerische und graphische Näherungsmethoden.

§ 14. Angenäherte Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Um eine Näherungslösung der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

zu finden, können wir das folgende, schon von Euler benutzte Verfahren anwenden.

Wenn x, y und $x + h$, $y + k$ benachbarte Punkte einer Integralkurve der Differentialgleichung (A) sind, erhält man, indem man den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ durch den Differenzenquotienten $\frac{k}{h}$ ersetzt, an Stelle der Differentialgleichung (A) die Differenzengleichung

$$(1) \qquad k = f(x, y) \cdot h .$$

Der hierbei begangene Fehler ist um so kleiner, je kleiner h ist.

Es sei die durch den Punkt $x = a$, $y = b$ gehende Integralkurve der Differentialgleichung (A) zu bestimmen. Wir wählen die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ so, daß entweder $a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ oder $a > a_1 > a_2 > \cdots > a_n$ ist, und berechnen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ aus den Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} b_1 - b = f(a, b) \cdot (a_1 - a) , \\ b_2 - b_1 = f(a_1, b_1) \cdot (a_2 - a_1) , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n - b_{n-1} = f(a_{n-1}, b_{n-1}) \cdot (a_n - a_{n-1}) . \end{cases}$$

Wenn wir je zwei aufeinanderfolgende der Punkte

$$a, b;\ a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \ldots;\ a_n, b_n$$

geradlinig verbinden, haben wir eine (bereits in § 2 eingeführte) gebrochene Linie, die eine in dem Intervall $a \leqq x \leqq a_n$ bzw. $a \geqq x \geqq a_n$ stetige Funktion y_0 von x darstellt; die Ableitung der Funktion y_0 ist stückweise stetig, da sich die Richtung des Linienzuges in den Punkten $a_1, a_2, \ldots$

§ 15. Methode von Runge und Kutta.

Der Zuwachs k der Integralfunktion y der Differentialgleichung (A), welcher einem Zuwachs h des Argumentes x entspricht, ist angenähert durch die Formel (1) dargestellt. Zur genaueren Berechnung von k dient die Taylorsche Reihe

$$k = \frac{h}{1!}\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots . \tag{5}$$

Durch die Differentialgleichung (A) und die Gleichungen, welche man daraus durch wiederholte Differentiation nach x erhält, nämlich

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2y}{dx^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{6}$$

sind für gegebene Werte von x, y die Werte aller Ableitungen bestimmt. Wenn $f(x, y)$ eine analytische Funktion von x, y ist, welche sich in der Umgebung der betrachteten Werte von x, y regulär verhält, so ist die Taylorsche Reihe konvergent, falls der absolute Betrag von h hinreichend klein angenommen wird (vgl. § 31). Wir gehen hier auf die Konvergenzfrage nicht ein; wir setzen voraus, daß wir uns in einem Gebiet befinden, in welchem die auftretenden Taylorschen Reihen konvergieren.

Wenn wir uns auf das erste Glied der Reihe (5) beschränken, haben wir die früher benutzte Näherungsformel (1). Eine bessere Annäherung erhalten wir, wenn wir mehrere Glieder der Reihe berücksichtigen. Ein von Runge herrührendes und von Kutta weiterentwickeltes Verfahren vermeidet die Berechnung der Ableitungen.

Wir geben eine Formel von Kutta für den zum Abszissenzuwachs h gehörigen Ordinatenzuwachs k:

$$\begin{cases} k = \dfrac{k' + 2k'' + 2k''' + k''''}{6}; \\ k' = f(x, y)h, \\ k'' = f(x + \frac{1}{2}h,\ y + \frac{1}{2}k')h, \\ k''' = f(x + \frac{1}{2}h,\ y + \frac{1}{2}k'')h, \\ k'''' = f(x + h,\ y + k''')h. \end{cases} \tag{7}$$

Wir wenden diese Formel zunächst auf die einfachere Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

an, für welche

$$k = \int_x^{x+h} f(\xi)\, d\xi$$

ist. Jetzt ist

$$k' = f(x)h\,, \quad k'' = k''' = f(x + \tfrac{1}{2}h)h\,, \quad k'''' = f(x + h)h\,,$$

$$k = \frac{h}{6}[f(x) + 4f(x + \tfrac{1}{2}h) + f(x + h)]\,,$$

d. i. die als Simpsonsche Regel bekannte Näherungsformel für die Berechnung eines bestimmten Integrals.

Um den Fehler, mit welchem die Formel (7) behaftet ist, zu beurteilen, wenden wir den Taylorschen Satz für Funktionen zweier Veränderlichen an und entwickeln $f(x + \frac{1}{2}h,\ y + \frac{1}{2}k')$ nach Potenzen von h, k', ferner $f(x + \frac{1}{2}h,\ y + \frac{1}{2}k'')$ nach Potenzen von h, k'' und $f(x + h,\ y + k''')$ nach Potenzen von h, k'''. Man kann demnach auf Grund der Formeln (7) k', k'', k''', k'''' und also auch k nach Potenzen von h entwickeln.

Die aus der Differentialgleichung (A) berechnete Größe k läßt sich nach (5) in eine Potenzreihe von h entwickeln.

Führt man die Rechnungen aus, so sieht man, daß der durch die Differentialgleichung bestimmte Wert von k und der durch die Formel (7) gelieferte Wert von k in den Gliedern mit h, h^2, h^3, h^4 übereinstimmen, während erst die Glieder mit h^5 in den beiden Ausdrücken für k voneinander abweichen. Der Kuttasche Ausdruck für k ist demnach mit einem Fehler von der Ordnung h^5 behaftet.

In dem Eulerschen Ausdruck (1), in welchem nur h^1 den richtigen Koeffizienten hat, ist der Fehler von der Ordnung h^2.

Bis auf einen Fehler von der Ordnung h^4 wird k durch den Ausdruck von Runge dargestellt:

$$(8) \qquad \begin{cases} k \;\; = \dfrac{k' + 4k'' + k''''}{6}\,; \\ k' \;\; = f(x, y)h\,, \\ k'' \;\; = f(x + \tfrac{1}{2}h,\ y + \tfrac{1}{2}k')h\,, \\ k''' \;\; = f(x + h,\ y + k')h\,, \\ k'''' = f(x + h,\ y + k''')h\,. \end{cases}$$

Wir haben bisher angenommen, daß die Taylorsche Reihe für k gut konvergiert. Wenn wir im Lauf der Rechnung zu einem Wertepaar x, y

gelangen, für welches $f(x, y)$ unendlich wird, läßt sich k als Funktion von h nicht mehr in eine Taylorsche Reihe entwickeln. Wenn man zu großen Werten von $f(x, y)$ gelangt, schreibt man die Differentialgleichung in der Gestalt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

und faßt x als Funktion von y auf.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10} y^2 - xy$$

soll mit den Anfangswerten $x = 0$, $y = 1$ integriert werden[1]).

Wir wenden die Formeln (7) an, worin $x = 0$, $y = 1$ und

$$f(x, y) = \tfrac{1}{10} y^2 - xy$$

zu setzen ist; wir wählen $h = 0 \cdot 2$. Wir haben

$$\begin{aligned}
f(0, 1) &= 0 \cdot 1; & k' &= 0 \cdot 02 \\
f(0 \cdot 1, 1 \cdot 01) &= 0 \cdot 001010; & k'' &= 0 \cdot 000202 \\
f(0 \cdot 1, 1 \cdot 000101) &= 0 \cdot 000010; & k''' &= 0 \cdot 000002 \\
f(0 \cdot 2, 1 \cdot 000002) &= -0 \cdot 100000; & k'''' &= -0 \cdot 020002,
\end{aligned}$$

also $k = 0 \cdot 000068$. Demnach sind $x = 0 \cdot 2$, $y = 1 \cdot 000068$ zusammengehörige Werte. Wir setzen jetzt diese Werte in die Formeln (7) ein, indem wir wieder $h = 0 \cdot 2$ annehmen. Wenn wir so fortfahren, erhalten wir die folgende Wertetabelle:

x	y	genauerer Wert
0·2	1·000068	
0·4	0·960538	0·9605374
0·6	0·885371	
0·8	0·782681	0·7826798
1·0	0·663284	
1·2	0·538736	0·5387334

Die Differentialgleichung läßt sich als Bernoullische Differentialgleichung nach § 5 integrieren. Man findet

$$y = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{c - \frac{1}{10}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx}$$

[1]) Vgl. Runge und König, Vorlesungen über numerisches Rechnen, S. 295f.

oder, wenn man die willkürliche Konstante c der Bedingung $x = 0, y = 1$ gemäß bestimmt und die Integrationsveränderliche $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$ einführt,

$$y = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{10} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-t^5} dt}.$$

Hieraus erhält man durch Reihenentwicklung die in der letzten Spalte der obigen Tabelle enthaltenen genaueren Werte.

§ 16. Differentialgleichungssysteme und Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Die in § 14 dargestellte Methode läßt sich auf ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen übertragen:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z). \end{cases}$$

Eine Lösung $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ des Differentialgleichungssystems (B) stellt sich, wenn man x, y, z als rechtwinklige Koordinaten eines Raumpunktes betrachtet, geometrisch als Raumkurve dar. Sind x, y, z und $x + h$, $y + k$, $z + l$ zwei benachbarte Punkte der räumlichen Integralkurve, so treten, wenn man die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ durch die Differenzenquotienten $\frac{k}{h}$, $\frac{l}{h}$ ersetzt, an die Stelle der Differentialgleichungen (B) die Differenzengleichungen

$$\text{(9)} \qquad k = f_1(x, y, z)h, \qquad l = f_2(x, y, z)h.$$

Sind die Anfangswerte $x = a$, $y = b$, $z = c$ gegeben, so wählt man $a_1, a_2, \ldots$ der Bedingung $a < a_1 < a_2 < \cdots$ oder der Bedingung $a > a_1 > a_2 > \cdots$ gemäß und setzt die Gleichungen an:

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} b_1 - b = f_1(a, b, c) \cdot (a_1 - a), & c_1 - c = f_2(a, b, c) \cdot (a_1 - a), \\ b_2 - b_1 = f_1(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2 - a_1), & c_2 - c_1 = f_2(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2 - a_1) \\ \cdots\cdots\cdots\

Die genauen Werte von k und l werden durch Taylorsche Reihen geliefert:

$$(10)\qquad \begin{cases} k = \dfrac{h}{1!}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{h^2}{2!}\dfrac{d^2y}{dx^2} + \cdots, \\ l = \dfrac{h}{1!}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{h^2}{2!}\dfrac{d^2z}{dx^2} + \cdots; \end{cases}$$

bei gegebenen Werten x, y, z sind $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$ durch die Gleichungen (B), die höheren Ableitungen von y, z durch

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{dz}{dx} \end{cases}$$

usw. bestimmt.

Die Ausdrücke (9) unterscheiden sich von den genauen Werten (10) um Größen von der Ordnung h^2.

Die Runge-Kuttaschen Ausdrücke

$$(12)\qquad \begin{cases} k = \dfrac{k' + 2k'' + 2k''' + k''''}{6}, \quad l = \dfrac{l' + 2l'' + 2l''' + l''''}{6}; \\ k' = f_1(x, y, z)h, \\ k'' = f_1(x + \frac{1}{2}h,\ y + \frac{1}{2}k',\ z + \frac{1}{2}l')h, \\ k''' = f_1(x + \frac{1}{2}h,\ y + \frac{1}{2}k'',\ z + \frac{1}{2}l'')h, \\ k'''' = f_1(x + h,\ y + k''',\ z + l''')h; \\ l' = f_2(x, y, z)h, \\ l'' = f_2(x + \frac{1}{2}h,\ y + \frac{1}{2}k',\ z + \frac{1}{2}l')h, \\ l''' = f_2(x + \frac{1}{2}h,\ y + \frac{1}{2}k'',\ z + \frac{1}{2}l'')h, \\ l'''' = f_2(x + h,\ y + k''',\ z + l''')h \end{cases}$$

sind mit einem Fehler von der Ordnung h^5 behaftet.

Gelangt man etwa zu großen Werten von $f_1(x, y, z)$, so führt man y als unabhängige Veränderliche ein und schreibt die Differentialgleichungen in der Form

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f_1(x, y, z)},$$
$$\frac{dz}{dy} = \frac{f_2(x, y, z)}{f_1(x, y, z)}.$$

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right)$$

kann als System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen y, z

$$\frac{dy}{dx} = z\,,$$

$$\frac{dz}{dx} = f\,(x,\, y,\, z)$$

geschrieben und nach der soeben dargestellten Methode behandelt werden.

Man kann aber auch, wie wir jetzt sehen werden, die Integralkurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung aus Kreisbögen zusammensetzen.

Die Differentialgleichung (C) können wir geometrisch deuten, indem wir

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$$

setzen, wo α den Winkel der Kurventangente mit der x-Achse darstellt, und an Stelle des zweiten Differentialquotienten den Krümmungsradius ϱ einführen. Es ist

$$\frac{1}{\varrho} = \left| \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| \cos^3\alpha \frac{d^2y}{dx^2} \right|$$

, oder

$$\text{(13)} \qquad \frac{1}{\varrho} = \left| \cos^3\alpha\, f(x,\, y,\, \operatorname{tg}\alpha) \right|.$$

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt den Krümmungsradius ϱ in einem Kurvenpunkt x, y, in welchem die Tangentenrichtung $\operatorname{tg}\alpha$ gegeben ist. Aus dem Vorzeichen von $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ersieht man, auf welcher Seite der Tangente der Krümmungsmittelpunkt liegt.

Indem man von einem gegebenen Punkt P_0 mit den Koordinaten $x = a$, $y = b$ mit einer gegebenen Tangentenrichtung $y' = b' = \operatorname{tg}\alpha$ ausgeht, stellt man die Integralkurve der Differentialgleichung durch eine Reihe von Kreisbögen angenähert dar. Aus Formel (13) erhält man für die gegebenen Anfangswerte $\varrho = \varrho_0$. Man trägt $P_0M_0 = \varrho_0$ senkrecht zur gegebenen Anfangsrichtung auf; um den zum Kurvenpunkt P_0 gehörigen

Krümmungsmittelpunkt M_0 beschreibt man mit dem Radius ϱ_0 einen kleinen Kreisbogen P_0P_1. Der Punkt P_1 habe die Koordinaten $x = a_1$, $y = b_1$; in diesem Punkt habe der Kreisbogen die Richtung $y' = \operatorname{tg}\alpha_1 = b'_1$; hieraus berechnet man nach (13) $\varrho = \varrho_1$; auf der Geraden P_1M_0 oder ihrer Verlängerung nimmt man den Punkt M_1 so an, daß $P_1M_1 = \varrho_1$ wird, und beschreibt um M_1 als Mittelpunkt einen Kreisbogen P_1P_2 usw.

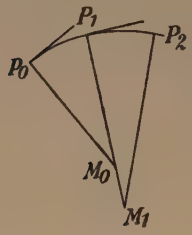

Fig. 1.

Beispiel. Die Besselsche Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

soll mit den Anfangswerten $x = 0$, $y = 1$, $y' = 0$ integriert werden[1]).

Wenn man $z = xy'$ setzt, hat man $z' = xy'' + y' = -xy$. Wir ersetzen die Besselsche Differentialgleichung durch die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = -xy.$$

Die Anfangsbedingungen sind $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. Es soll die Runge-Kuttasche Methode mit $h = 0.2$ angewandt und bis $x = 1.2$ gegangen werden.

§ 17. Graphische Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Es liege wieder die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

vor. Jedem Punkt x, y eines gewissen Gebietes der xy-Ebene wird wie in § 2 eine Richtung

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = y' = f(x, y)$$

zugeordnet. Wenn die Tangente in jedem Punkt x, y einer Kurve die diesem Punkt vermöge (14) zugeordnete Richtung hat, stellt die Kurve eine Integralkurve der Differentialgleichung dar.

Diejenigen Punkte x, y, welchen dieselbe Richtung $\operatorname{tg}\alpha = y' = \lambda$ entspricht, wo λ eine gegebene Konstante ist, liegen auf der Kurve

$$f(x, y) = \lambda,$$

welche man als Isokline bezeichnet. Der Inhalt der Differentialgleichung wird dadurch geometrisch dargestellt, daß man eine Schar von Isoklinen zeichnet und die jeder Isokline entsprechende Richtung angibt. Wir legen

[1]) Runge und König, a. a. O., S. 313f.

alle Richtstrahlen durch einen festen Pol O und versehen sie mit denselben Nummern wie die zugehörigen Isoklinen. Es sei hervorgehoben, daß die geometrische Darstellung der Differentialgleichung durch Isoklinen und Richtstrahlen von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist.

Um die Integralkurve durch einen gegebenen Punkt P_0 angenähert zu zeichnen, konstruieren wir eine Schar von Isoklinen $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$, deren erste $\mathfrak{C}_0$ durch den Punkt P_0 geht, und die diesen Isoklinen entsprechenden Richtstrahlen $l_0, l_1, l_2, \ldots$ Wir ziehen durch P_0 eine Parallele zu l_0 bis nach dem Punkte P_1 ungefähr in der Mitte zwischen $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1$; durch P_1 legen wir eine Parallele zu l_1 bis nach dem Punkte P_2 ungefähr in der Mitte zwischen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ usw. Durch die gebrochene Linie $P_0P_1P_2\ldots$ wird die gesuchte Integralkurve angenähert dargestellt. Als Annäherung können wir auch eine Kurve zeichnen, welche die gebrochene Linie in ihren Schnittpunkten mit den Isoklinen $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ berührt.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

soll mit der Anfangsbedingung $x = 0.3$, $y = 0.4$ integriert werden.

Die Isokline $\operatorname{tg}\alpha = \lambda$ ist der Kreis $x^2 + y^2 = \lambda$ mit dem Radius $\sqrt{\lambda}$. Der Anfangspunkt liegt auf dem Kreis vom Radius $\frac{1}{2}$, das ist die Isokline $\lambda = \frac{1}{4}$. In Fig. 2 sind die Isoklinen $\lambda = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, d. h. die Kreise mit

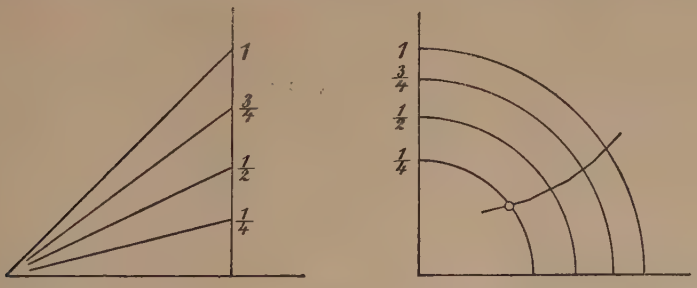

Fig. 2.

den Radien $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, 1 gezeichnet und die Schnittpunkte der gesuchten Integralkurve mit diesen Isoklinen angenähert dargestellt. Links befinden sich die den gezeichneten Isoklinen entsprechenden Richtstrahlen.

Für eine lineare Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{15}$$

kann man nach Czuber ein anderes Verfahren anwenden. Dem Punkt x, y entspricht die Richtung

$$y' = Q - Py$$

oder die Gerade

$$\eta - y = (Q - Py)(\xi - x),$$

welche durch den Punkt

$$\xi = x + \frac{1}{P}, \quad \eta = \frac{Q}{P} \tag{16}$$

geht, der nur von x, aber nicht von y abhängt. Jedem Wert von x, d. h. jeder Parallelen zur y-Achse, entspricht ein Strahlpunkt (16), durch welchen alle Richtungen gehen, die den verschiedenen Punkten der y-Parallelen zugeordnet sind. Man zeichnet eine Schar von y-Parallelen und die entsprechenden Strahlpunkte, wobei jeder Strahlpunkt mit derselben Nummer versehen wird wie die y-Parallele, der er zugehört. Nunmehr kann man die Integralkurve, welche durch einen gegebenen Punkt geht, angenähert zeichnen.

Beispiel. Die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^2$$

soll mit der Anfangsbedingung $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$ integriert werden.

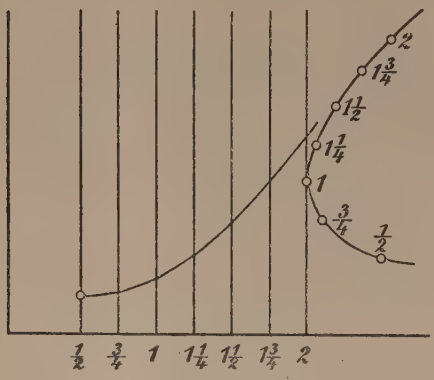

Fig. 3.

Zur Abszisse x gehört der Strahlpunkt

$$\xi = x + \frac{1}{x}, \qquad \eta = x,$$

welcher auf der gleichseitigen Hyperbel

$$\xi\eta - \eta^2 - 1 = 0$$

liegt. Fig. 3 enthält die zu den Abszissen $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 2$ gehörigen Strahlpunkte, an welche diese Abszissenwerte geschrieben sind, und ein mit Hilfe dieser Strahlpunkte bestimmtes Stück der gesuchten Integralkurve.

§ 18. Anwendung der Methode der schrittweisen Annäherung zur graphischen oder numerischen Lösung von Differentialgleichungen.

Eine irgendwie (etwa nach § 14, § 15 oder § 17) gefundene Näherungslösung der Differentialgleichung (A) kann man nach der Methode der schrittweisen Annäherung (§ 11) verbessern, die man in graphischer Form anwenden kann.

Die bereits gefundene Ausgangslösung habe (in bezug auf das ursprüngliche oder auf ein anderes zweckmäßig gewähltes Koordinaten-

system) die Gleichung $y = y_0(x)$. Nach § 11 haben wir die zweite Näherungslösung $y = y_1(x)$, wo

$$y_1 = b + \int_a^x f(x,\ y_0)\,dx \tag{17}$$

ist, wenn der gegebene Ausgangspunkt P_0 die Koordinaten a, b hat. Da man die Werte der Funktion y_0 für eine Reihe von Werten von x kennt, kann man für diese x-Werte auch die Werte der Funktion $f(x, y_0)$ berechnen und somit die Kurve $y = f(x, y_0)$ zeichnen. Indem man diese Kurve graphisch integriert[1]), wobei P_0 als Ausgangspunkt zu wählen ist, erhält man die zweite Näherungskurve $y = y_1(x)$.

Wenn eine Schar von Isoklinen gezeichnet ist, ergeben sich folgendermaßen die Werte der Funktion $f(x, y_0)$ in den Punkten, in welchen die Kurve $y = y_0(x)$ von den Isoklinen $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ geschnitten wird. Man legt durch den Pol O des Richtstrahlenbüschels eine Parallele l zur (ursprünglichen oder neu eingeführten) x-Achse und im Abstande 1 von O eine dazu senkrechte Gerade. Die Strecke, welche auf dieser senkrechten Geraden von l und dem Richtstrahl $l_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ abgeschnitten wird, stellt den Wert der Funktion $f(x, y_0)$ im Schnittpunkt der Kurve $y = y_0$ mit der Isokline $\mathfrak{C}_i$ dar; die Abszisse dieses Schnittpunktes ist der zugehörige x-Wert. Damit hat man die graphische Darstellung der Funktion $y = f(x, y_0)$, die man wie oben graphisch integriert.

Weicht y_1 merklich von y_0 ab, so bestimmt man eine dritte Näherungslösung

$$y_2 = b + \int_a^x f(x,\ y_1)\,dx. \tag{18}$$

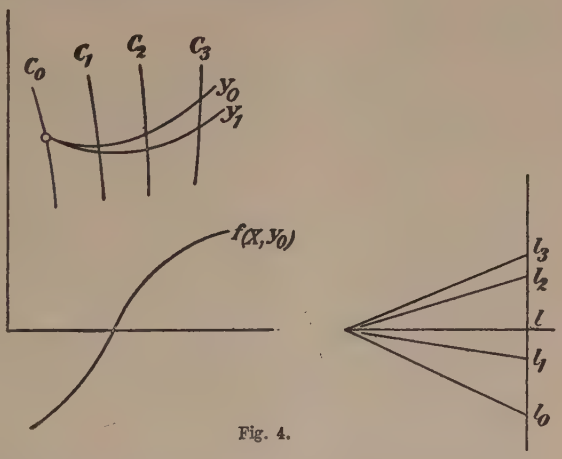

Fig. 4.

Der Wert der Funktion $f(x, y)$ auf der Isokline $\mathfrak{C}_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, also auch im Schnittpunkt dieser Isokline mit der Näherungskurve $y = y_1$, ist bereits aus der Zeichnung bestimmt; dieser Wert ist der Funktionswert $f(x, y_1)$, wenn als x-Wert die Abszisse des eben erwähnten Schnittpunktes genommen wird. Ist so die Funktion $f(x, y_1)$ graphisch dargestellt, so erhält man durch graphische Integration die dritte Näherungskurve $y = y_2$.

[1]) Über graphische Integration vgl. z. B. H. v. Sanden, Praktische Analysis, 7. Kap.

So fährt man fort, bis sich zwei aufeinanderfolgende Kurven $y = y_{n-1}$ und $y = y_n$ nicht mehr unterscheiden.

Es kann zweckmäßig sein, vor der Anwendung der Methode der schrittweisen Annäherung eine Drehung des Koordinatensystems so vorzunehmen, daß in der Gegend, in welcher die Integralkurve verbessert werden soll, die Isoklinen auf der neuen x-Achse möglichst senkrecht stehen.

Die Richtungsgröße $-\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$ der Isokline $f(x, y) = \lambda$ ist groß, wenn $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ klein ist; dann ist die in § 11 eingeführte Größe K klein, und nach S. 31, Formel (12) ist der Unterschied zwischen der wirklichen Lösung y der Differentialgleichung und der Näherungslösung y_n um so kleiner, je kleiner K ist.

Bisher dachten wir uns die Quadraturen, welche die Methode der schrittweisen Annäherung erfordert, auf graphischem Wege ausgeführt. Wir nehmen jetzt an, die Ausgangslösung $y_0(x)$ sei tabellarisch gegeben. Wenn man die Werte der Funktion y_0 für die Werte $a, a_1 = a + h$, $a_2 = a + 2h, \ldots$ von x kennt, kann man die Werte der Funktion $f(x, y_0)$ für dieselben Werte von x berechnen. Durch ein Verfahren numerischer Integration erhält man die Werte der Näherungslösung y_1 für die Werte $a, a + h, a + 2h, \ldots$ der Veränderlichen x. Durch nochmalige Anwendung dieses Verfahrens berechnet man die zu diesen Werten von x gehörigen Werte der folgenden Näherungslösung y_2 usw.

Bei Runge und König, a. a. O., S. 302f., ist die in § 15 nach der Runge-Kuttaschen Methode behandelte Differentialgleichung $y' = \frac{1}{10} y^2 - xy$ nach der Methode der schrittweisen Annäherung unter Benutzung der Ausgangslösung $y_0 = 1$ bei numerischer Ausführung der Quadraturen behandelt. Ferner ist a. a. O., S. 306, auf dieselbe Differentialgleichung die Methode der schrittweisen Annäherung angewandt, als Ausgangslösung y_0 aber die Lösung benutzt, welche sich nach der Runge-Kuttaschen Methode in Tabellenform ergeben hat. Auf diese Weise kann die nach dem Runge-Kuttaschen Verfahren gefundene Lösung nachgeprüft und unter Umständen verbessert werden.

Um die räumliche Integralkurve $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ des Differentialgleichungssystems

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \end{cases}$$

zu bestimmen, welche durch den Punkt $x=a$, $y=b$, $z=c$ geht, zeichnen wir in einer Ebene die xy-Projektion $y=\varphi(x)$ und in einer anderen Ebene die xz-Projektion $z=\psi(x)$ der Raumkurve.

Es sei auf irgendeinem Wege eine Näherungslösung des Differentialgleichungssystems gefunden, z. B. die in § 16 ermittelte gebrochene Linie. Sie habe die Gleichungen

$$y=y_0(x), \qquad z=z_0(x);$$

ihre beiden Projektionen seien gezeichnet. Nach § 12 ergibt sich die zweite Näherungslösung

$$y=y_1(x), \qquad z=z_1(x),$$

wo

$$(19) \qquad y_1=b+\int_a^x f_1(x,\ y_0,\ z_0)\,dx, \qquad z_1=c+\int_a^x f_2(x,\ y_0,\ z_0)\,dx$$

ist. Da die Funktionen y_0 und z_0 von x bekannt sind, so kann man in der xy-Ebene die Kurve

$$y=f_1(x, y_0, z_0)$$

und in der xz-Ebene die Kurve

$$z=f_2(x, y_0, z_0)$$

zeichnen. Indem man die erste Kurve mit Benutzung des Ausgangspunktes $x=a$, $y=b$ graphisch integriert, erhält man in der xy-Ebene die Kurve $y=y_1$; durch graphische Integration der zweiten Kurve mit dem Ausgangspunkt $x=a, z=c$ erscheint die Kurve $z=z_1$ in der xz-Ebene. Wenn die Funktionen y_1, z_1 noch merklich von den Funktionen y_0, z_0 abweichen, erhält man durch Fortsetzung dieses Verfahrens weitere Näherungskurven.

Wenn man die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(C) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)$$

wie in § 16 als System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen schreibt, kann man die Methode der schrittweisen Annäherung in der Form anwenden, wie sie soeben dargestellt wurde.

Die Differentialgleichung (C) soll mit der Anfangsbedingung $x=a$, $y=b$, $y'=b'$ integriert werden. Aus einer bekannten Näherungslösung y_0 ergibt sich eine zweite Näherungslösung auf Grund der Gleichungen

$$(20) \qquad \begin{cases} y_1''=f(x,\ y_0,\ y_0'), \\ y_1'=b'+\int_a^x f(x,\ y_0,\ y_0')\,dx, \\ y_1=b+\int_a^x y_1'\,dx. \end{cases}$$

Man stellt $f(x, y_0, y_0')$ als Funktion von x graphisch dar; durch graphische Integration dieser Funktion mit Benutzung der Ausgangswerte $x = a$, $y' = b'$ erhält man in der xy'-Ebene die Kurve $y' = y_1'$; indem man die letztere Kurve mit dem Ausgangspunkt $x = a$, $y = b$ graphisch integriert, erscheint in der xy-Ebene die Kurve $y = y_1$. Wenn y_1 von y_0 merklich abweicht, bildet man durch Fortsetzung dieses Verfahrens eine weitere Näherungslösung y_2 usw.

Auch im Falle eines Systems von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung oder einer Differentialgleichung zweiter Ordnung kann man die Quadraturen, welche die Methode der schrittweisen Annäherung erfordert, auf numerischem Wege ausführen.

Bei Runge und König, a. a. O., S. 318f., ist das aus der Besselschen Differentialgleichung gewonnene Differentialgleichungssystem (S. 48)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = -xy$$

mit der Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ nach der Methode der schrittweisen Annäherung bei numerischer Ausführung der Quadraturen unter Benutzung der Ausgangslösung $y_0 = 1$, $z_0 = 0$ integriert.

In der zweiten Auflage von Hort, Differentialgleichungen des Ingenieurs ist die Schwingungsdifferentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} + \sin y = 0$$

mit der Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 0$, $y' = 4$ nach der Methode der schrittweisen Annäherung unter Benutzung der Ausgangslösung $y_0 = 4x$ integriert (a. a. O., S. 325). Dieselbe Differentialgleichung ist auch nach der Krümmungskreismethode (a. a. O., S. 276f.) sowie nach den hier nicht behandelten Methoden von Duffing und Gümbel integriert (a. a. O., S. 307f. und S. 322f.).

Die auf das Differentialgleichungssystem (B) angewandte graphische Methode läßt sich auf ein System von mehr als zwei Differentialgleichungen mit ebenso vielen unbekannten Funktionen $y, z, u, \ldots$ übertragen, indem man eine xy-Ebene, eine xz-Ebene, eine xu-Ebene usw. benutzt.

Viertes Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen; elementare Integrationsmethoden.

§ 19. Existenz der Lösungen linearer Differentialgleichungen.

Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = F(x),$$

d. h. eine Gleichung, welche in bezug auf die Funktion y und ihre Differentialquotienten bis zur n^{ten} Ordnung linear ist. $P_1(x), \ldots, P_{n-1}(x)$, $P_n(x)$ und $F(x)$ sind Funktionen der reellen Veränderlichen x, die auf ein Intervall J beschränkt wird, in welchem diese Funktionen stetig sind.

Die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (1) kann auf ein System von n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit den n Funktionen

$$y,\ y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

zurückgeführt werden. Es bestehen nämlich die n Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y',\\
\frac{dy'}{dx} &= y'',\\
&\cdots\cdots\\
\frac{dy^{(n-2)}}{dx} &= y^{(n-1)},\\
\frac{dy^{(n-1)}}{dx} &= -P_n y - P_{n-1}y' - \cdots - P_1 y^{(n-1)} + F.
\end{aligned}$$

Nach dem in § 12 für ein System linearer Differentialgleichungen ausgesprochenen Satze ist ein und nur ein System von im Intervall J stetigen

Funktionen $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ vorhanden, welche diesen n Differentialgleichungen genügen und für den dem Intervall J angehörenden Wert $x = a$ die beliebig vorgeschriebenen Werte $y = b, y' = b', \ldots, y^{(n-1)} = b^{(n-1)}$ annehmen.

Die Differentialgleichung (1) besitzt eine und nur eine im Intervall J nebst den n ersten Ableitungen stetige Lösung y, welche so beschaffen ist, daß für den im Intervall J gelegenen Wert $x = a$

$$y = b, \quad \frac{dy}{dx} = b', \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = b^{(n-1)}$$

wird.

Besonders wichtig ist der Fall $F(x) \equiv 0$. Die Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = 0,$$

welche in bezug auf die Funktion y und deren Differentialquotienten linear und homogen ist, wird als homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung bezeichnet. In § 22 wird gezeigt, daß die nichthomogene lineare Differentialgleichung (1) vermittels Quadraturen integriert werden kann, nachdem die homogene lineare Differentialgleichung (A) integriert ist. Daher werden wir uns vorzugsweise mit der Differentialgleichung (A) beschäftigen.

§ 20. Fundamentalsystem von Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung.

Die n Systeme von je n konstanten Größen

$$b_i, b_i', \ldots, b_i^{(n-1)} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

seien so gewählt, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} b_1, & b_1', & \ldots, & b_1^{(n-1)} \\ b_2, & b_2', & \ldots, & b_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_n, & b_n', & \ldots, & b_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Wir verstehen unter $y_i (i = 1, \ldots, n)$ diejenige Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung (A), welche dadurch bestimmt ist, daß an der dem Stetigkeitsintervall J angehörenden Stelle $x = a$

$$y_i = b_i, \quad \frac{dy_i}{dx} = b_i', \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}} = b_i^{(n-1)}$$

sein soll. Dann ist die Determinante

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} y_1, & \frac{dy_1}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \\ y_2, & \frac{dy_2}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n, & \frac{dy_n}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

als stetige Funktion von x nicht nur an der Stelle $x = a$, sondern auch in einer gewissen Umgebung dieser Stelle von Null verschieden. Die n so bestimmten Lösungen

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

bilden nach der Ausdrucksweise von L. Fuchs ein Fundamentalsystem. Wir können sagen:

Die n Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ der linearen homogenen Differentialgleichung (A) bilden ein Fundamentalsystem, wenn die aus ihnen gebildete Determinante (2) nicht identisch verschwindet.

Die Determinante Δ wird als (Wronskische) Determinante des Fundamentalsystems bezeichnet. Ein Fundamentalsystem kann auf unendlich viele Arten gebildet werden.

Die Koeffizienten $P_1, \ldots, P_n$ der Differentialgleichung (A) lassen sich durch ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ ausdrücken.

Denn da die Differentialgleichung befriedigt wird, wenn man $y = y_i (i = 1, \ldots, n)$ setzt, so bestehen die n Gleichungen

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + P_n y_1 = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^n y_n}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy_n}{dx} + P_n y_n = 0,$$

welche wir als lineare Gleichungen mit den n Unbekannten $P_1, \ldots, P_n$ auffassen und mit Hilfe von Determinanten auflösen. Versteht man unter $\Delta_i (i = 1, \ldots, n)$ die Determinante, welche aus der Determinante Δ hervorgeht, indem man die Elemente der Spalte

$$\frac{d^{n-i} y_1}{dx^{n-i}}, \ldots, \frac{d^{n-i} y_n}{dx^{n-i}}$$

durch

$$\frac{d^n y_1}{dx^n}, \ldots, \frac{d^n y_n}{dx^n}$$

ersetzt, so hat man

$$P_i = -\frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Insbesondere ist

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1, & \ldots, & \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}}, & \frac{d^n y_1}{dx^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n, & \ldots, & \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}}, & \frac{d^n y_n}{dx^n} \end{vmatrix}.$$

Der Differentialquotient $\frac{d\Delta}{dx}$ der Determinante Δ erscheint als Summe von n Determinanten, die aus Δ hervorgehen, indem man die Elemente je einer Spalte differentiiert; da eine Determinante mit zwei gleichen Spalten verschwindet, hat man

$$\frac{d\Delta}{dx} = \Delta_1.$$

Demnach ist

$$P_1 = -\frac{\frac{d\Delta}{dx}}{\Delta} = -\frac{d \log \Delta}{dx},$$

also

$$\log \Delta = -\int_a^x P_1 dx + \log C,$$

wo a dem Intervall J angehört und C eine Konstante darstellt. In dem Ausdruck

$$\Delta = C e^{-\int_a^x P_1 dx} \tag{4}$$

kann C nicht Null sein, da Δ nicht identisch verschwindet; daraus folgt aber, daß die Determinante Δ im Stetigkeitsintervall J nirgends verschwindet.

Sind $y_1, \ldots, y_n$ Lösungen der Differentialgleichung (A) und $C_1, \ldots, C_n$ konstante Größen, so stellt auch

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \tag{5}$$

eine Lösung der Differentialgleichung dar.

Denn wenn man die Gleichungen

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n y_1 = 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n y_n}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n y_n = 0$$

mit den Konstanten $C_1, \ldots, C_n$ multipliziert und addiert, erhält man die Gleichung

$$\frac{d^n (C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n)}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}(C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n)}{dx^{n-1}} + \cdots$$
$$+ P_n (C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n) = 0\,.$$

Bilden die n Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ der Differentialgleichung (A) ein Fundamentalsystem, so läßt sich jede andere Lösung y in der Form

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \tag{5}$$

darstellen, wo $C_1, \ldots, C_n$ Konstante sind.

Zum Beweise nehmen wir an, an der Stelle $x = a$ im Intervall J sei

$$y = b\,,\ \frac{dy}{dx} = b'\,,\ \ldots,\ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = b^{(n-1)}.$$

Da durch diese Bedingungen eine Lösung der Differentialgleichung vollständig bestimmt ist, so brauchen wir nur zu zeigen, daß sich die Konstanten $C_1, \ldots, C_n$ so bestimmen lassen, daß für $x = a$

$$C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n = b\,,$$

$$C_1 \frac{dy_1}{dx} + \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx} = b'\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + C_n \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} = b^{(n-1)}$$

wird. Diese Bestimmung von $C_1, \ldots, C_n$ ist aber möglich, denn die Determinante Δ des Fundamentalsystems $y_1, \ldots, y_n$ ist für $x = a$ von Null verschieden.

Bilden $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (A) und versteht man unter $C_1, \ldots, C_n$ willkürliche Konstante, so stellt

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung dar; legt man den Größen $C_1, \ldots, C_n$ bestimmte Zahlenwerte bei, so hat man ein partikuläres Integral.

Zwischen den n Elementen $y_1, \ldots, y_n$ eines Fundamentalsystems besteht keine Gleichung

$$C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n = 0 \tag{6}$$

mit konstanten Koeffizienten $C_1, \ldots, C_n$, die nicht sämtlich verschwinden.

Denn durch wiederholte Differentiation der Gleichung (6) erhält man die n Gleichungen

$$\begin{aligned} C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n &= 0\,, \\ C_1 \frac{dy_1}{dx} + \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx} &= 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\

für $x = a$ erfüllt sind. Demnach wäre

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$$

eine Lösung der Differentialgleichung (A), welche nebst ihren $n-1$ niedrigsten Ableitungen für $x = a$ verschwindet. Die einzige Lösung, welche diese Bedingung erfüllt, ist $y \equiv 0$. Es wäre also für alle x

$$C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n = 0,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Wenn zwischen den n Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ von x keine Gleichung von der Form (6) besteht, so sagt man, die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ sind linear unabhängig. Demnach sind n Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ der Differentialgleichung (A), welche ein Fundamentalsystem bilden, linear unabhängig; umgekehrt bilden n linear unabhängige Lösungen von (A) ein Fundamentalsystem.

§ 21. Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Die lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

läßt sich mit Hilfe von Exponentialfunktionen (oder trigonometrischen Funktionen) integrieren.

Setzt man

$$y = e^{rx},$$

wo r eine Konstante bezeichnet, so wird

$$\frac{dy}{dx} = r e^{rx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = r^2 e^{rx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = r^n e^{rx},$$

und die linke Seite der Differentialgleichung (B) nimmt den Wert

$$e^{rx} f(r)$$

an, wenn

$$\text{(7)} \qquad f(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n$$

gesetzt wird.

Hat die charakteristische Gleichung

$$f(r) = 0$$

eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades mit der Unbekannten r, n verschiedene Wurzeln $r_1, \ldots, r_n$, so besitzt die Differentialgleichung (B) die n partikulären Lösungen

$$y_1 = e^{r_1 x}, \ \ldots, \ y_n = e^{r_n x}. \tag{8}$$

Um zu zeigen, daß diese n Lösungen ein Fundamentalsystem bilden, berechnen wir die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1, & \frac{dy_1}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n, & \frac{dy_n}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} = e^{(r_1+\cdots+r_n)x} \begin{vmatrix} 1, & r_1, & \ldots, & r_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & r_n, & \ldots, & r_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & r_1, & \ldots, & r_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & r_n, & \ldots, & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

ist gleich dem Produkt aus den $\frac{n(n-1)}{2}$ Differenzen zwischen je zweien der n Größen $r_1, \ldots, r_n$; da diese n Größen als verschieden vorausgesetzt wurden, ist das Differenzenprodukt von Null verschieden, und die Determinante Δ kann nicht identisch verschwinden. Die Differentialgleichung (B) hat demnach die allgemeine Lösung

$$y = C_1 e^{r_1 x} + \cdots + C_n e^{r_n x} \tag{9}$$

mit den n willkürlichen Konstanten $C_1, \ldots, C_n$.

Um auch den Fall mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung $f(r) = 0$ behandeln zu können, differentiieren wir die für alle Werte von x und r gültige Gleichung

$$\frac{d^n(e^{rx})}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}(e^{rx})}{dx^{n-1}} + \cdots = e^{rx} f(r)$$

wiederholt nach r, wobei wir die Differentiationen nach x und r vertauschen und den 1., 2., ... Differentialquotienten von e^{rx} nach r durch xe^{rx}, x^2e^{rx}, ... ersetzen:

$$\frac{d^n(xe^{rx})}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}(xe^{rx})}{dx^{n-1}} + \cdots = e^{rx}[f'(r) + xf(r)],$$

$$\frac{d^n(x^2e^{rx})}{dx^n} + \cdots = e^{rx}[f''(r) + 2xf'(r) + x^2 f(r)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n(x^\nu e^{rx})}{dx^n} + \cdots = e^{rx}[f^{(\nu)}(r) + (\nu)_1 x f^{(\nu-1)}(r) + \cdots + x^\nu f(r)].$$

Hat nun die charakteristische Gleichung $f(r) = 0$ die μ_1-fache Wurzel r_1, die μ_2-fache Wurzel r_2 usw., die μ_m-fache Wurzel r_m, so daß $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m = n$ ist, so ist für $i = 1, \ldots, m$

$$f(r_i) = 0\,, \quad f'(r_i) = 0\,, \ \ldots\,, \quad f^{(\mu_i - 1)}(r_i) = 0\,.$$

Die linke Seite der Differentialgleichung (B) verschwindet also, wenn man für y eine der Funktionen

$$(10) \qquad e^{r_i x}, \quad x e^{r_i x}, \quad x^2 e^{r_i x}, \ \ldots, \quad x^{\mu_i - 1} e^{r_i x} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

setzt. Wenn man diese partikulären Lösungen der Differentialgleichung (B) mit willkürlichen Konstanten multipliziert und addiert, erhält man die Lösung

$$(11) \qquad y = G_1(x) e^{r_1 x} + \cdots + G_m(x) e^{r_m x}\,,$$

wo $G_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ eine ganze Funktion $(\mu_i - 1)^{\text{ten}}$ Grades von x mit willkürlichen Koeffizienten darstellt. Dies ist die allgemeine Lösung, da, wie wir sogleich sehen werden, zwischen den oben gefundenen $\mu_1 + \cdots + \mu_m = n$ partikulären Lösungen (10) keine lineare homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten bestehen kann.

Eine solche Beziehung müßte die Form haben:

$$g_1(x) e^{r_1 x} + g_2(x) e^{r_2 x} + \cdots + g_m(x) e^{r_m x} = 0\,,$$

wo

$$g_i(x) = c_i x^{\nu_i} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

eine ganze Funktion von x vom Grade $\nu_i \leqq \mu_i - 1$ darstellt; $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sind voneinander verschieden. Unter der Annahme, daß $g_1(x)$ nicht identisch verschwindet, erhalten wir durch Multiplikation mit $e^{-r_1 x}$

$$g_1(x) + g_2(x) e^{(r_2 - r_1)x} + \cdots + g_m(x) e^{(r_m - r_1)x} = 0$$

und durch Differentiation

$$g_1'(x) + [g_2'(x) + (r_2 - r_1)\, g_2(x)]\, e^{(r_2 - r_1)x} + \cdots = 0\,,$$

wo $e^{(r_2 - r_1)x}$ wieder mit einer ganzen Funktion ν_2^{ten} Grades multipliziert ist, während $g_1'(x)$ vom Grad $\nu_1 - 1$ ist. Nach $(\nu_1 + 1)$-maliger Differentiation hat man eine Gleichung von der Form

$$h_2(x) e^{(r_2 - r_1)x} + \cdots + h_m(x) e^{(r_m - r_1)x} = 0\,,$$

wo $h_2(x), \ldots, h_m(x)$ ganze Funktionen der Grade $\nu_2, \ldots, \nu_m$ sind. So fährt man fort, bis man zu einer unmöglichen Identität von der Form

$$k(x) e^{sx} = 0$$

kommt, wo $k(x)$ eine nicht identisch verschwindende ganze Funktion ist.

Sind die Koeffizienten der Differentialgleichung (B) reell und hat die charakteristische Gleichung $f(r)=0$ die einfache komplexe Wurzel

$$r_1 = \alpha + i\beta ,$$

so tritt daneben die konjugierte Wurzel

$$r_2 = \alpha - i\beta$$

auf. Diesen beiden Wurzeln entsprechen in dem allgemeinen Integral y die Glieder

$$\begin{aligned} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} &= e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x}[C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)] \\ &= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x] \end{aligned}$$

oder, wenn

$$A = C_1 + C_2 , \qquad B = i(C_1 - C_2)$$

gesetzt wird, die Glieder

$$e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) , \tag{12}$$

wo A, B willkürliche Konstante sind, denen wir reelle Werte beilegen.

Sind

$$r_1 = \alpha + i\beta , \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

μ-fache konjugiert komplexe Wurzeln der charakteristischen Gleichung, so sind die ihnen im allgemeinen Integral entsprechenden Glieder, wenn unter $G_1(x), G_2(x)$ ganze Funktionen $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Grades von x mit willkürlichen Koeffizienten verstanden werden:

$$G_1(x)e^{r_1 x} + G_2(x)e^{r_2 x} .$$

Sie gehen, wenn

$$\Phi(x) = G_1(x) + G_2(x) , \qquad \Psi(x) = i[G_1(x) - G_2(x)]$$

gesetzt wird, in

$$e^{\alpha x}[\Phi(x)\cos\beta x + \Psi(x)\sin\beta x] \tag{13}$$

über, wo $\Phi(x), \Psi(x)$ ganze Funktionen $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Grades von x mit willkürlichen Koeffizienten sind, die reell angenommen werden können.

Beispiele.

1. $$\frac{d^2y}{dx^2} + 13\frac{dy}{dx} + 40y = 0 .$$

Lösung: $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-8x}$.

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 34y = 0 .$$

Lösung: $y = e^{-3x}(A\cos 5x + B\sin 5x)$.

3. $$\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 36y = 0\,.$$

Lösung: $y = e^{6x}(C_1x + C_2)$.

4. $$\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0 \quad (k \text{ reell}).$$

Lösung: $y = e^{kx}(A\cos kx + B\sin kx) + e^{-kx}(A'\cos kx + B'\sin kx)$.

5. $$\frac{d^4y}{dx^4} + 2k^2\frac{d^2y}{dx^2} + k^4y = 0.$$

Lösung: $y = A\cos kx + B\sin kx + A'x\cos kx + B'x\sin kx$.

Die lineare homogene Differentialgleichung

(14) $$x^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}x\frac{dy}{dx} + a_ny = 0,$$

worin $a_1, \ldots, a_n$ Konstante sind, kann durch die Substitution

$$\log x = t, \qquad x = e^t$$

auf eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt werden. Es ist nämlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt},$$

also

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt};$$

fährt man so fort, so erhält man schließlich für $x^n\frac{d^ny}{dx^n}$ eine lineare homogene Funktion von $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dt^n}$ mit konstanten Koeffizienten. Die Differentialgleichung (14) geht also in eine Differentialgleichung

$$\frac{d^ny}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1}\frac{dy}{dt} + b_ny = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $b_1, \ldots, b_n$ über.

Hat die charakteristische Gleichung

$$r^n + b_1r^{n-1} + \cdots + b_{n-1}r + b_n = 0$$

n verschiedene Wurzeln $r_1, \ldots, r_n$, so besitzt die Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$y = C_1e^{r_1t} + \cdots + C_ne^{r_nt}$$

oder

$$y = C_1 x^{r_1} + \cdots + C_n x^{r_n} \tag{15}$$

mit den willkürlichen Konstanten $C_1, \ldots, C_n$. Wenn die charakteristische Gleichung die μ_1-fache Wurzel $r_1, \ldots$, die μ_m-fache Wurzel r_m besitzt, wobei $\mu_1 + \cdots + \mu_m = n$ sein muß, so hat die Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$y = e^{r_1 t} G_1(t) + \cdots + e^{r_m t} G_m(t),$$

wo $G_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ eine ganze Funktion $(\mu_i - 1)^{\text{ten}}$ Grades von t mit willkürlichen Koeffizienten darstellt, oder

$$y = x^{r_1} G_1(\log x) + \cdots + x^{r_m} G_m(\log x). \tag{16}$$

Ohne Einführung der Veränderlichen t erhält man durch Einsetzung von $y = x^r$ in die Differentialgleichung (14) die charakteristische Gleichung in der Form

$$r(r-1)\ldots(r-n+1) + a_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0. \tag{17}$$

Beispiel.

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$

Lösung: $y = A \cos(2 \log x) + B \sin(2 \log x) + C x^2$.

§ 22. Nichthomogene lineare Differentialgleichungen.

Ist ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ der linearen homogenen Differentialgleichung (A) bekannt, so läßt sich die nichthomogene lineare Differentialgleichung (1) oder

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x) y = F(x) \tag{C}$$

vermittels Quadraturen integrieren[1]).

Um dies zu zeigen, setzen wir in (C)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \tag{18}$$

wo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ nicht Konstante, sondern Funktionen von x darstellen. Werden die Funktionen $C_2, \ldots, C_n$ beliebig gewählt, so ist C_1 durch die Differentialgleichung (C) bestimmt. Anstatt $n - 1$ der Funktionen $C_1, \ldots, C_n$ willkürlich zu wählen, kann man auch $n - 1$ Glei-

[1]) Vgl. die Behandlung der nichthomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung in § 5.

chungen zwischen $C_1, \ldots, C_n$ willkürlich annehmen; eine n^{te} Gleichung ergibt sich dann durch Einsetzung des Ausdrucks (18) in die Differentialgleichung (C).

Die Differentiation von (18) ergibt

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx} + y_1 \frac{dC_1}{dx} + \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx};$$

als erste der erwähnten $n-1$ Gleichungen führen wir ein:

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0; \tag{19}$$

dann ist

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx}. \tag{18_1}$$

Unter Einführung der zweiten Gleichung

$$\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \cdots + \frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx} = 0 \tag{19_1}$$

wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + \cdots + C_n \frac{d^2y_n}{dx^2}. \tag{18_2}$$

So fortfahrend hat man, nachdem die $(n-1)^{\text{te}}$ Gleichung

$$\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dC_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{dC_n}{dx} = 0 \tag{19_{n-2}}$$

eingeführt ist,

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + C_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}, \tag{18_{n-1}}$$

und hieraus ergibt sich durch Differentiation

$$\begin{cases} \dfrac{d^n y}{dx^n} = C_1 \dfrac{d^n y_1}{dx^n} + \cdots + C_n \dfrac{d^n y_n}{dx^n} \\ \qquad + \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\dfrac{dC_1}{dx} + \cdots + \dfrac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\dfrac{dC_n}{dx}. \end{cases} \tag{18_n}$$

Setzt man die für y und die Ableitungen erster bis n^{ter} Ordnung angeschriebenen Ausdrücke (18), (18_1), …, (18_n) in die nichthomogene Differentialgleichung (C) ein und beachtet man, daß

$$\frac{d^n y_i}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}\frac{dy_i}{dx} + P_n y_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

ist, so erhält man als n^{te} Gleichung zwischen $C_1, \ldots, C_n$ die folgende:

$$(19_{n-1}) \qquad \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx} = F(x).$$

Die Gleichungen (19), $(19_1), \ldots, (19_{n-2}), (19_{n-1})$ stellen n lineare Gleichungen mit den Unbekannten

$$\frac{dC_1}{dx}, \ldots, \frac{dC_n}{dx}$$

dar; da die Determinante der Koeffizienten der Unbekannten, die Determinante Δ des Fundamentalsystems $y_1, \ldots, y_n$, in dem Stetigkeitsintervall J nirgends verschwindet, so hat man

$$(20) \qquad \frac{dC_i}{dx} = \frac{E_i F(x)}{\Delta} = f_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

wo E_i die Unterdeterminante von $\frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}$ in der Determinante Δ darstellt. Man hat also

$$C_1 = \int_a^x f_1(x)\,dx + c_1, \quad \ldots, \quad C_n = \int_a^x f_n(x)\,dx + c_n,$$

wo a eine beliebige Stelle des Intervalls J ist, während $c_1, \ldots, c_n$ willkürliche Konstante bezeichnen.

Demnach ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung (C)

$$(21) \qquad y = y_1\Big(\int_a^x f_1(x)\,dx + c_1\Big) + \cdots + y_n\Big(\int_a^x f_n(x)\,dx + c_n\Big).$$

Man nennt die Gleichung (A) die zur Differentialgleichung (C) gehörige reduzierte Differentialgleichung. Die beschriebene von Lagrange herrührende Methode zur Integration der nichthomogenen Differentialgleichung wird Methode der Variation der Konstanten genannt. Sie besteht darin, daß man die in dem allgemeinen Integral $y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$ der reduzierten Differentialgleichung enthaltenen willkürlichen Konstanten $C_1, \ldots, C_n$ durch Funktionen von x ersetzt.

Die Ausführung der obigen Quadraturen läßt sich vermeiden, wenn ein partikuläres Integral η der nichthomogenen Differentialgleichung (C) ohne weiteres angegeben werden kann. Subtrahiert man die Gleichung

$$\frac{d^n\eta}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}\frac{d\eta}{dx} + P_n\eta = F$$

für das als bekannt vorausgesetzte partikuläre Integral η von der Gleichung (C), welcher das allgemeine Integral y genügt, so erhält man die Gleichung

$$\frac{d^n(y-\eta)}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}(y-\eta)}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}\frac{d(y-\eta)}{dx} + P_n(y-\eta) = 0.$$

Als Lösung der homogenen Differentialgleichung (A) ist $y-\eta$ von der Form $c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$, wo $c_1, \ldots, c_n$ Konstante sind. Demnach ist

$$y = \eta + c_1y_1 + \cdots + c_ny_n. \tag{22}$$

Wir haben demnach den Satz:

Das allgemeine Integral der nichthomogenen Differentialgleichung (C) setzt sich aus einem partikulären Integral der nichthomogenen Differentialgleichung (C) und dem allgemeinen Integral der homogenen Differentialgleichung (A) zusammen.

Ist

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

und ist η_1 eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^ny}{dx^n} + \cdots + P_ny = F_1,$$

η_2 eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^ny}{dx^n} + \cdots + P_ny = F_2,$$

so ist $\eta_1 + \eta_2$ eine Lösung der Differentialgleichung (C). Denn durch Addition der Gleichungen

$$\frac{d^n\eta_1}{dx^n} + \cdots = F_1, \quad \frac{d^n\eta_2}{dx^n} + \cdots = F_2$$

erhält man die Gleichung

$$\frac{d^n(\eta_1+\eta_2)}{dx^n} + \cdots = F.$$

Von dieser Bemerkung kann man bisweilen Gebrauch machen, um eine partikuläre Lösung einer nichthomogenen Differentialgleichung zu finden.

§ 23. Nichthomogene lineare Differentialgleichungen, besonderer Fall.

Die nichthomogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x)$$

mit den konstanten Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ läßt sich nach § 22 durch Quadraturen integrieren, nachdem die durch Nullsetzen von $F(x)$ daraus hervorgehende reduzierte Gleichung nach § 21 gelöst ist.

Wir betrachten den Fall

$$F(x) = g(x) e^{kx},$$

wo k eine Konstante und

$$g(x) = b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \cdots + b_{p-1} x + b_p \tag{23}$$

eine ganze Funktion p^{ten} Grades von x ist. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = g(x) e^{kx} \tag{D}$$

braucht nicht nach der Methode der Variation der Konstanten integriert zu werden, da sich eine partikuläre Lösung angeben läßt, aus welcher die allgemeine Lösung nach dem am Schluß von § 22 ausgesprochenen Satze hervorgeht. Wir setzen

$$\begin{aligned}
y &= e^{kx} z, \\
\frac{dy}{dx} &= e^{kx}\left(kz + \frac{dz}{dx}\right), \\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= e^{kx}\left(k^2 z + 2k \frac{dz}{dx} + \frac{d^2 z}{dx^2}\right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{d^n y}{dx^n} &= e^{kx}\left(k^n z + n k^{n-1} \frac{dz}{dx} + \cdots + \frac{d^n z}{dx^n}\right).
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung (D), aus welcher sich der Faktor e^{kx} weghebt, schreibt sich, wenn

$$f(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n$$

gesetzt wird:

$$f(k) z + \frac{f'(k)}{1!} \frac{dz}{dx} + \frac{f''(k)}{2!} \frac{d^2 z}{dx^2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(k)}{n!} \frac{d^n z}{dx^n} = g(x).$$

Wenn $f(k)$ von Null verschieden ist, d. h. wenn k mit keiner der Wurzeln $r_1, r_2, \ldots$ der charakteristischen Gleichung $f(r) = 0$ übereinstimmt, kann man

$$z = G(x)$$

setzen, wo

$$G(x) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \cdots + B_{p-1} x + B_p$$

eine ganze Funktion p^{ten} Grades von x ist. Die Vergleichung der Koeffizienten von x^p, x^{p-1}, ... ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(k) B_0 &= b_0, \\ f(k) B_1 + p f'(k) B_0 &= b_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

aus welchen sich B_0, B_1, ... berechnen lassen.

Ist $r = k$ eine μ-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung $f(r) = 0$, ist also

$$f(k) = 0, \quad f'(k) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(\mu-1)}(k) = 0, \quad f^{(\mu)}(k) \neq 0,$$

so hat man für z die Differentialgleichung

$$\frac{f^{(\mu)}(k)}{\mu!} \frac{d^\mu z}{dx^\mu} + \frac{f^{(\mu+1)}(k)}{(\mu+1)!} \frac{d^{\mu+1} z}{dx^{\mu+1}} + \cdots + \frac{f^{(n)}(k)}{n!} \frac{d^n z}{dx^n} = g(x).$$

Setzt man

$$\frac{d^\mu z}{dx^\mu} = G^{(\mu)}(x) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \cdots + B_{p-1} x + B_p,$$

so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten von x^p, x^{p-1}, ... die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{f^{(\mu)}(k)}{\mu!} B_0 &= b_0, \\ \frac{f^{(\mu)}(k)}{\mu!} B_1 + \frac{f^{(\mu+1)}(k)}{(\mu+1)!} \cdot p B_0 &= b_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

aus welchen man B_0, B_1, ... berechnet. Durch μ-malige Integration von $G^{(\mu)}(x)$ erhält man

$$z = G(x)$$

als ganze Funktion $(p+\mu)^{\text{ten}}$ Grades von x, in welcher die Koeffizienten von x^0, x^1, ..., $x^{\mu-1}$ beliebig gewählt, insbesondere gleich Null gesetzt werden können.

Die Differentialgleichung (D) besitzt eine partikuläre Lösung

$$y = G(x) e^{kx}, \tag{24}$$

wo $G(x)$ eine ganze Funktion p^{ten} Grades ist, wenn k der charakteristischen Gleichung $f(r) = 0$ nicht genügt, eine ganze Funktion $(p+\mu)^{\text{ten}}$ Grades, wenn k eine μ-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung ist.

Nachdem die Form der Lösung ermittelt ist, können die Koeffizienten von $G(x)$ aus der Differentialgleichung (D) nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten berechnet werden.

Ist $p = 0$, $g(x) = b$ konstant, so ist im Falle $\mu = 0$

$$G(x) = B = \frac{b}{f(k)},$$

im Falle $\mu = 1, 2, \ldots$

$$G^{(\mu)}(x) = B = \frac{\mu!\, b}{f^{(\mu)}(k)}, \qquad G(x) = \frac{b\, x^{\mu}}{f^{(\mu)}(k)}.$$

Die Differentialgleichung (D) mit der rechten Seite $b e^{kx}$ hat also die partikuläre Lösung

$$y = \frac{b e^{kx}}{f(k)},$$

wenn k der charakteristischen Gleichung nicht genügt, die Lösung

$$y = \frac{b x^{\mu} e^{kx}}{f^{(\mu)}(k)},$$

wenn k eine μ-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung ist.

Beispiele.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = e^{2x}$.

Lösung: $y = \frac{1}{3} e^{2x} + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$.

Da 2 keine Wurzel der charakteristischen Gleichung ist, ist eine partikuläre Lösung $y = Ce^{2x}$ vorhanden; durch Einsetzen in die Differentialgleichung findet man $C = \frac{1}{3}$. Die Rechnung nach der Methode der Variation der Konstanten ist umständlicher.

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \sin 2x$.

Lösung. $y = -\frac{1}{3} \sin 2x + A \cos x + B \sin x$.

Der Satz von § 23 kann angewandt werden, da sich $\sin 2x$ durch Exponentialfunktionen ausdrücken läßt, die man jedoch nicht wirklich einzuführen braucht (vgl. § 24, II).

§ 24. Kleine Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad.

Wir wenden die Integrationsmethoden von § 21 und § 23 auf die Theorie der kleinen Schwingungen an.

I. Ein Punkt, dessen Masse wir der Einfachheit halber gleich 1 annehmen, bewege sich auf der x-Achse; er habe zur Zeit t die Abszisse x; es wirke auf ihn die Kraft $-k^2 x$, wo k^2 eine positive Konstante darstellt,

und ein der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ proportionaler Widerstand, die Dämpfung $-2h\frac{dx}{dt}$, wo $2h$ eine positive Größe ist. Die Differentialgleichung der gedämpften Schwingungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0 \tag{25}$$

hat die charakteristische Gleichung

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0$$

mit den Wurzeln

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Ist $h < k$, so sind diese Wurzeln konjugiert komplex; setzt man $l^2 = k^2 - h^2$, so ist

$$r_1 = -h + il, \qquad r_2 = -h - il,$$

und die Differentialgleichung hat die Lösung

$$x = C_1 e^{(-h+il)t} + C_2 e^{(-h-il)t}$$

oder

$$x = e^{-ht}(A\cos lt + B\sin lt), \tag{26}$$

wo C_1, C_2 bzw. A, B willkürliche Konstanten sind, oder, wenn vermittels der Gleichungen

$$A = a\sin\lambda, \qquad B = a\cos\lambda$$

die Integrationskonstanten a, λ eingeführt werden,

$$x = ae^{-ht}\sin(lt + \lambda). \tag{27}$$

Ist $h = 0$, also keine Dämpfung vorhanden, so ist $l = k$, und (27) geht über in die Gleichung

$$x = a\sin(kt + \lambda), \tag{28}$$

welche ungedämpfte Schwingungen mit der Periode (Schwingungsdauer) $T = \frac{2\pi}{k}$ darstellt. Die Konstante a ist die Amplitude (die größte Entfernung des bewegten Punktes von der Gleichgewichtslage $x = 0$), während λ als Phase bezeichnet wird.

Es sei jetzt $h > 0$. Die Differentiation von (26) ergibt

$$\frac{dx}{dt} = a'e^{-ht}\sin(lt + \lambda'),$$

wobei gesetzt ist:

$$lB - hA = a'\sin\lambda', \qquad -lA - hB = a'\cos\lambda'.$$

Die Werte von t, für welche $\frac{dx}{dt} = 0$ ist, bilden eine arithmetische Reihe mit der Differenz $\frac{\pi}{l}$. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maximalwerten (oder Minimalwerten) von x, welche den konstanten Wert

$$\frac{2\pi}{l} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}$$

hat, kann wieder als Schwingungsdauer bezeichnet werden. Die aufeinanderfolgenden extremen Werte von x bilden eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $-e^{-\frac{h\pi}{l}}$; die Größe $\frac{h\pi}{l}$ heißt logarithmisches Dekrement.

Die Bewegung hat einen wesentlich anderen Charakter, wenn $h > k$ ist, also r_1 und r_2 reell und negativ sind; es ist dann

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \tag{29}$$

Im Falle $h = k$ hat man $r_1 = r_2 = -h$ und

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2 t). \tag{30}$$

In den Fällen (29) und (30) hat man $\lim x = 0$ für $\lim t = +\infty$. Es liegt eine sogenannte aperiodische Bewegung vor.

II. Wir nehmen jetzt an, daß auf den bewegten Massenpunkt außer der Kraft $-k^2 x$ und der Dämpfung $-2h\frac{dx}{dt}$ noch eine äußere Kraft wirkt, welche eine periodische Funktion der Zeit t mit der Periode $\frac{2\pi}{q}$ ist, etwa $a\cos qt + b\sin qt$. Die Bewegung erfolgt nach der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2 x = a\cos qt + b\sin qt. \tag{31}$$

Diese Gleichung besitzt im allgemeinen eine partikuläre Lösung von der Form

$$x = \mathfrak{A}\cos qt + \mathfrak{B}\sin qt. \tag{32}$$

Durch Einsetzung dieses Ausdrucks in die Differentialgleichung (31) und Vergleichung der Koeffizienten von $\cos qt$ und $\sin qt$ erhält man die Gleichungen

$$(k^2 - q^2)\,\mathfrak{A} + 2hq\mathfrak{B} = a,$$
$$-2hq\mathfrak{A} + (k^2 - q^2)\,\mathfrak{B} = b,$$

aus welchen man

$$\mathfrak{A} = \frac{(k^2 - q^2)\,a - 2hqb}{(k^2 - q^2)^2 + 4h^2q^2}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{2hqa + (k^2 - q^2)\,b}{(k^2 - q^2)^2 + 4h^2q^2} \tag{33}$$

als Brüche mit stets positivem Nenner berechnet, falls nicht $h = 0$ und zugleich $q = k$ ist. Die partikuläre Lösung (32) stellt eine erzwungene Schwingung dar, deren Periode $\frac{2\pi}{q}$ mit der Periode der erregenden äußeren Kraft übereinstimmt.

Die allgemeinste der Differentialgleichung (31) entsprechende Bewegung setzt sich aus dieser erzwungenen Schwingung und der Eigenschwingung zusammen, welche durch die allgemeine Lösung (26) der homogenen Differentialgleichung dargestellt wird (wenn $h < k$ ist und $l^2 = k^2 - h^2$ gesetzt wird).

Im Falle $h = 0$ haben wir die erzwungene Schwingung

$$x = \frac{a \cos qt + b \sin qt}{k^2 - q^2}, \tag{34}$$

wenn $q \gtrless k$ ist. Ist jedoch $q = k$, fällt also die Periode $\frac{2\pi}{q}$ der äußeren Kraft mit der Periode $\frac{2\pi}{k}$ der ungedämpften Eigenschwingung

$$x = A \cos kt + B \sin kt$$

zusammen, so ist die partikuläre Lösung

$$x = \frac{at \sin kt - bt \cos kt}{2k} \tag{35}$$

vorhanden. Es ist dies der Fall der Resonanz.

§ 25. Reduktion linearer Differentialgleichungen.

Wir kehren zur homogenen linearen Differentialgleichung mit beliebigen stetigen Koeffizienten zurück.

Die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A) läßt sich unter Benutzung einer bekannten Lösung $y = y_1$ auf eine lineare Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen.

Setzt man nämlich

$$y = y_1 \int z\,dx, \tag{36}$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} \int z\,dx + y_1 z,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2} \int z\,dx + 2\frac{dy_1}{dx} z + y_1 \frac{dz}{dx},$$

. . . . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^ny_1}{dx^n} \int z\,dx + n\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} z + \cdots + n\frac{dy_1}{dx}\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + y_1 \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}.$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Differentialgleichung (A) einsetzt, so verschwindet der Faktor von $\int z\,dx$, das ist die linke Seite von (A) für $y = y_1$, und man erhält, indem man durch y_1 dividiert, für z eine Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + Q_1\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \cdots + Q_{n-2}\frac{dz}{dx} + Q_{n-1}\,z = 0, \tag{37}$$

deren Koeffizienten

$$Q_1 = \frac{1}{y_1}\left(n\frac{dy_1}{dx} + P_1 y_1\right),$$

$$Q_2 = \frac{1}{y_1}\left((n)_2\frac{d^2y_1}{dx^2} + (n-1)_1 P_1\frac{dy_1}{dx} + P_2 y_1\right),$$

. . . . . .

$$Q_{n-1} = \frac{1}{y_1}\left((n)_{n-1}\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + (n-1)_{n-2}P_1\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} + \cdots + (2)_1 P_{n-2}\frac{dy_1}{dx} + P_{n-1}y_1\right)$$

im Intervall J nur dann stetig sind, wenn die im Nenner auftretende Funktion y_1 nicht verschwindet.

Bilden die Funktionen $z_2, \ldots, z_n$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (37), so ist

$$y_1,\ y_2 = y_1\int z_2\,dx,\ \ldots,\ y_n = y_1\int z_n\,dx \tag{38}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A).

Denn bestände zwischen $y_1, \ldots, y_n$ eine Gleichung

$$C_1 y_1 + C_2 y_1\int z_2\,dx + \cdots + C_n y_1\int z_n\,dx = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $C_1, \ldots, C_n$, so würde durch Division mit y_1 und nachfolgende Differentiation die Gleichung entstehen:

$$C_2 z_2 + \cdots + C_n z_n = 0.$$

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1\frac{dy}{dx} + P_2 y = 0 \tag{39}$$

kann, wenn ein partikuläres Integral y_1 bekannt ist, durch Quadraturen integriert werden. Denn die Substitution

$$y = y_1\int z\,dx$$

führt auf die Differentialgleichung erster Ordnung

$$y_1\frac{dz}{dx} + \left(2\frac{dy_1}{dx} + P_1 y_1\right)z = 0;$$

die Trennung der Veränderlichen ergibt

$$\frac{dz}{z} = -\left(2\frac{d\log y_1}{dx} + P_1\right)dx$$

und die Integration unter Weglassung der Integrationskonstanten

$$\log z = -2\log y_1 - \int P_1 dx;$$

hiernach ist

$$z = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1 dx},$$

und man erhält als zweites partikuläres Integral der Differentialgleichung (39):

$$y = y_1 \int e^{-\int P_1 dx} \frac{dx}{y_1^2}. \tag{40}$$

Bisweilen empfiehlt es sich, die lineare Differentialgleichung (A) durch die Substitution

$$y = z e^{-\frac{1}{n}\int P_1 dx} \tag{41}$$

in eine lineare Differentialgleichung mit der abhängigen Veränderlichen z überzuführen, in welcher das Glied mit $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ fehlt. Ist nämlich φ eine Funktion von x und setzt man

$$y = \varphi z,$$

so wird

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi\frac{d^n z}{dx^n} + n\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots,$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \varphi\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots,$$

und die Differentialgleichung (A) geht über in

$$\varphi\frac{d^n z}{dx^n} + \left(n\frac{d\varphi}{dx} + P_1\varphi\right)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots = 0.$$

Durch Nullsetzen des Koeffizienten von $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ erhält man die Gleichung

$$n\frac{d\varphi}{dx} + P_1\varphi = 0$$

oder

$$\varphi = e^{-\frac{1}{n}\int P_1 dx}.$$

Legen wir demgemäß eine Differentialgleichung (A) zugrunde, in welcher der Koeffizient P_1 von $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ identisch verschwindet, so nimmt die Determinante eines beliebigen Fundamentalsystems

$$\Delta = Ce^{-\int P_1 dx} = C$$

einen konstanten Wert an.

§ 26. Systeme linearer Differentialgleichungen.

Die in §§ 19—25 entwickelten Sätze über lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung lassen sich auf Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit n abhängigen Veränderlichen übertragen.

Wir betrachten zunächst das System linearer homogener Differentialgleichungen

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = A_{11}(x)\,y_1 + \cdots + A_{1n}(x)\,y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} = A_{n1}(x)\,y_1 + \cdots + A_{nn}(x)\,y_n, \end{cases}$$

dessen Koeffizienten $A_{11}(x), \ldots, A_{nn}(x)$ Funktionen der reellen Veränderlichen x sind, welche in einem Intervall J dieser Veränderlichen stetig sind. Sind $b_1, \ldots, b_n$ beliebig gegebene endliche Größen, so besitzt das System (E) eine und nur eine Lösung $y_1, \ldots, y_n$ von solcher Beschaffenheit, daß für den dem Intervall J angehörenden Wert $x = a$

$$y_1 = b_1, \ldots, y_n = b_n$$

wird.

Sind n^2 Konstante

$$b_{1k}, \ldots, b_{nk} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

so gegeben, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} b_{11}, \ldots, b_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{1n}, \ldots, b_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so bilden die n Lösungen

$$y_1 = y_{1k}, \ldots, y_n = y_{nk} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

welche durch die Anfangsbedingungen

$$y_{1k} = b_{1k}, \ldots, y_{nk} = b_{nk}$$

für $x = a$ bestimmt sind, ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems (E); die nicht identisch verschwindende Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{11}, \cdots, y_{n1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{1n}, \cdots, y_{nn} \end{vmatrix} \tag{42}$$

ist die Determinante des Fundamentalsystems.

Die Koeffizienten A_{ik} des Systems (E) lassen sich durch die Funktionen y_{ik} ausdrücken. Da die Gleichung

$$\frac{dy_i}{dx} = A_{i1}y_1 + \cdots + A_{in}y_n$$

durch die n Wertsysteme

$$y_1 = y_{1k}, \ldots, y_n = y_{nk} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

befriedigt wird, so bestehen die n Gleichungen

$$\frac{dy_{i1}}{dx} = A_{i1}y_{11} + \cdots + A_{in}y_{n1},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{dy_{in}}{dx} = A_{i1}y_{1n} + \cdots + A_{in}y_{nn},$$

aus welchen sich die n Unbekannten $A_{i1}, \ldots, A_{in}$ als Determinantenquotienten in der Form

$$A_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \tag{43}$$

ergeben; dabei ist

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} y_{11}, \cdots, y_{k-1,1}, & \frac{dy_{i1}}{dx}, & y_{k+1,1}, \cdots, y_{n1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{1n}, \cdots, y_{k-1,n}, & \frac{dy_{in}}{dx}, & y_{k+1,n}, \cdots, y_{nn} \end{vmatrix}$$

die Determinante, welche aus der Determinante Δ dadurch hervorgeht, daß man die k^{te} Spalte $y_{k1}, \ldots, y_{kn}$ durch $\frac{dy_{i1}}{dx}, \ldots, \frac{dy_{in}}{dx}$ ersetzt.

Die Differentiation der Determinante Δ ergibt

$$\frac{d\Delta}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ii};$$

hierbei ist Δ_{ii} die Determinante, in welche die Determinante Δ übergeht, indem man die Elemente $y_{i1}, \ldots, y_{in}$ der i^{ten} Spalte durch ihre Ableitungen $\frac{dy_{i1}}{dx}, \ldots, \frac{dy_{in}}{dx}$ ersetzt. Es ist also

$$\frac{d \log \Delta}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{ii}}{\Delta} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

und

$$\Delta = C e^{\int_a^x \sum_{i=1}^{n} A_{ii} dx}, \tag{44}$$

wo die Konstante C den von Null verschiedenen Wert von Δ für $x = a$ darstellt. Aus diesem Ausdruck erkennt man, daß die Determinante Δ im Intervall J nirgends verschwindet.

Sind

$$y_{1k}, \ldots, y_{nk} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

n Lösungen des Differentialgleichungssystems (E) und $C_1, \ldots, C_n$ konstante Größen, so ist auch

$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_{11} + \cdots + C_n y_{1n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = C_1 y_{n1} + \cdots + C_n y_{nn} \end{cases} \tag{45}$$

eine Lösung des Systems (E). Bilden jene n Lösungen ein Fundamentalsystem, so läßt sich jede Lösung $y_1, \ldots, y_n$ von (E) auf die Form (45) bringen. Die Gleichungen (45) stellen die allgemeine Lösung von (E) dar, wenn man $C_1, \ldots, C_n$ als willkürliche Konstante auffaßt, dagegen eine partikuläre Lösung, wenn man den C bestimmte Zahlenwerte beilegt.

Zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems

$$y_{1k}, \ldots, y_{nk} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

kann kein Gleichungssystem

$$\begin{cases} C_1 y_{11} + \cdots + C_n y_{1n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 y_{n1} + \cdots + C_n y_{nn} = 0 \end{cases} \tag{46}$$

mit konstanten Koeffizienten $C_1, \ldots, C_n$ bestehen. Umgekehrt bilden die n Lösungen

$$y_1 = y_{1k}, \ldots, y_n = y_{nk} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

ein Fundamentalsystem, wenn kein Gleichungssystem von der Form (46) mit konstanten Koeffizienten besteht.

Ist ein Fundamentalsystem

$$y_{1k}, \ldots, y_{nk} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

des Systems linearer homogener Differentialgleichungen (E) bekannt, so läßt sich das System linearer nichthomogener Differentialgleichungen

$$(F)\quad \frac{dy_i}{dx} = A_{i1}(x)y_1 + \cdots + A_{in}(x)y_n + F_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

durch Quadraturen integrieren.

Nach der Methode der Variation der Konstanten ersetzen wir die in der allgemeinen Lösung des reduzierten Systems (E)

$$(47)\qquad y_i = C_1 y_{i1} + \cdots + C_n y_{in} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

enthaltenen willkürlichen Konstanten $C_1, \ldots, C_n$ durch Funktionen von x, welche wir so bestimmen, daß die Differentialgleichungen (F) befriedigt werden. Es ist

$$(47_1)\quad \frac{dy_i}{dx} = C_1\frac{dy_{i1}}{dx} + \cdots + C_n\frac{dy_{in}}{dx} + y_{i1}\frac{dC_1}{dx} + \cdots + y_{in}\frac{dC_n}{dx};$$

durch Einsetzen in das System (F) unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\frac{dy_{i1}}{dx} = A_{i1}y_{11} + \cdots + A_{in}y_{n1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dy_{in}}{dx} = A_{i1}y_{1n} + \cdots + A_{in}y_{nn}$$

erhält man

$$(48)\qquad y_{i1}\frac{dC_1}{dx} + \cdots + y_{in}\frac{dC_n}{dx} = F_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Da die Determinante Δ im Intervall J von Null verschieden ist, berechnet man daraus

$$(49)\qquad \frac{dC_1}{dx} = f_1(x), \ldots, \frac{dC_n}{dx} = f_n(x)$$

und

$$C_1 = \int_a^x f_1(x)dx + c_1, \ldots, C_n = \int_a^x f_n(x)dx + c_n,$$

wo $c_1, \ldots, c_n$ willkürliche Konstante sind. Die allgemeine Lösung des nichthomogenen Systems ist demnach

$$(50)\quad y_i = y_{i1}\Big(\int_a^x f_1(x)\,dx + c_1\Big) + \cdots + y_{in}\Big(\int_a^x f_n(x)\,dx + c_n\Big) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Man wendet jedoch die Methode der Variation der Konstanten nicht an, wenn man eine partikuläre Lösung des Systems nichthomogener linearer Differentialgleichungen (F) kennt (vgl. § 22 und § 23).

§ 27. Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_{ik}(i, k = 1, \ldots, n)$

$$(G)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}\,y_1 + \cdots + a_{1n}\,y_n\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}\,y_1 + \cdots + a_{nn}\,y_n \end{cases}$$

läßt sich ähnlich wie eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe von (reellen oder imaginären) Exponentialfunktionen integrieren.

Wir setzen

$$(51)\qquad y_1 = A_1 e^{rx}, \ldots, y_n = A_n e^{rx}\,,$$

wo r und $A_1, \ldots, A_n$ Konstante sind. Indem wir diese Ausdrücke und ihre Differentialquotienten

$$\frac{dy_1}{dx} = rA_1 e^{rx}, \ldots, \qquad \frac{dy_n}{dx} = rA_n e^{rx}$$

in die Gleichungen (G) einsetzen, erhalten wir die Gleichungen

$$(52)\qquad \begin{cases} (a_{11} - r)A_1 + a_{12}A_2 + \cdots + a_{1n}A_n = 0\,, \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - r)A_2 + \cdots + a_{2n}A_n = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \cdots + (a_{nn} - r)A_n = 0\,. \end{cases}$$

Damit diese Gleichungen durch Werte $A_1, \ldots, A_n$ befriedigt werden, welche nicht sämtlich verschwinden, ist notwendig und hinreichend, daß r der Gleichung

$$(53)\qquad f(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - r, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0\,,$$

der charakteristischen Gleichung, genügt.

Ist r eine einfache Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades $f(r) = 0$, so können die Unterdeterminanten $f_{ii}(r)$ der Diagonalelemente $a_{ii} - r(i = 1, \ldots, n)$ der Determinante $f(r)$ nicht sämtlich verschwinden. Denn der nach r genommene Differentialquotient der Determinante $f(r)$ wird erhalten, indem man den Differentialquotienten eines jeden Elementes der Determinante mit der Unterdeterminante dieses Elementes multipliziert und die Produkte addiert; der nach r genommene Differential-

quotient eines Diagonalelementes ist gleich -1, der eines anderen Elementes gleich 0; es ist also

$$\frac{df(r)}{dr} = -\sum_{i=1}^{n} f_{ii}(r).$$

Wären $f_{11}(r), \ldots, f_{nn}(r)$ sämtlich gleich Null, so wäre $\frac{df(r)}{dr} = 0$, d. h. r wäre eine mehrfache Wurzel der Gleichung $f(r) = 0$. Ist z. B.

$$f_{11}(r) = \begin{vmatrix} a_{22} - r, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & \ldots, & a_{nn} - r \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, so sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{21}A_1 + (a_{22} - r)A_2 + \cdots + \quad a_{2n}A_n &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad

$r = r_1$ gesetzt wird, $n - \mu$ der Größen $A_1, \ldots, A_n$ durch die übrigen μ, welche willkürlich bleiben, ausdrücken. Das Differentialgleichungssystem (G) besitzt demnach μ linear unabhängige Lösungen von der Form

$$y_1 = A_1 e^{r_1 x}, \ldots, y_n = A_n e^{r_1 x}. \tag{55}$$

Haben alle mehrfachen Wurzeln der Gleichung $f(r) = 0$ die für r_1 angenommene Eigenschaft, so sind wieder n linear unabhängige partikuläre Lösungen von der Form (51) vorhanden.

Hat die charakteristische Gleichung (53) die μ_1-fache Wurzel r_1, die μ_2-fache Wurzel r_2, ..., so hat das Differentialgleichungssystem (G), wie wir ohne Beweis angeben, eine Lösung von der Form

$$y_i = g_{i1}(x)\, e^{r_1 x} + g_{i2}(x)\, e^{r_2 x} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{56}$$

wo $g_{i1}(x)$ eine ganze Funktion $(\mu_1 - 1)^{\text{ten}}$ oder geringeren Grades, $g_{i2}(x)$ eine ganze Funktion $(\mu_2 - 1)^{\text{ten}}$ oder geringeren Grades usw. ist; die Koeffizienten dieser ganzen Funktionen hängen von insgesamt n willkürlichen Konstanten ab. Indem man Ausdrücke von der Form (56) mit unbestimmten Koeffizienten in die Differentialgleichungen (G) einsetzt, erhält man lineare Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten.

Den Fall $n = 2$ wollen wir vollständig behandeln.

Es liege ein System von zwei linearen Differentialgleichungen

$$\text{(G')} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{cases}$$

mit den konstanten Koeffizienten $a_{11}, \ldots, a_{22}$ vor. Die charakteristische Gleichung

$$f(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} - r \end{vmatrix} = r^2 - (a_{11} + a_{22}) r + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = 0$$

habe die Doppelwurzel r_0, so daß wegen $f'(r_0) = 0$

$$r_0 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$$

ist.

Im Falle $r_0 = a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21} = 0$ haben wir die Differentialgleichungen

$$\frac{dy_1}{dx} = r_0 y_1, \qquad \frac{dy_2}{dx} = r_0 y_2,$$

deren allgemeine Lösung

$$y_1 = A_1 e^{r_0 x}, \qquad y_2 = A_2 e^{r_0 x} \tag{57}$$

die beiden willkürlichen Konstanten A_1, A_2 enthält.

Liegt dieser Fall nicht vor, so sind a_{12} und a_{21} nicht gleichzeitig Null; wir können also a_{12} von Null verschieden voraussetzen. Die Funktionen

$$y_i = e^{r_0 x}(A_i x + B_i) \qquad (i = 1, 2)$$

genügen den Differentialgleichungen (G'), wenn

$$\text{(58)} \qquad \begin{cases} (a_{11} - r_0)A_1 + a_{12}A_2 = 0, \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - r_0)A_2 = 0 \end{cases}$$

und

$$\text{(59)} \qquad \begin{cases} (a_{11} - r_0)B_1 + a_{12}B_2 = A_1, \\ a_{21}B_1 + (a_{22} - r_0)B_2 = A_2 \end{cases}$$

ist. Aus den Gleichungen (58) folgt

$$A_2 = \frac{r_0 - a_{11}}{a_{12}} A_1 .$$

Wenn man die erste Gleichung (59) mit $a_{22} - r_0$, die zweite mit $-a_{12}$ multipliziert, ergibt sich

$$0 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 = (a_{22} - r_0)A_1 - a_{12}A_2 = (a_{11} + a_{22} - 2r_0)A_1 = 0 .$$

Die eine der beiden Gleichungen (59) ist eine Folge der anderen. Aus der ersten berechnet man

$$B_2 = \frac{r_0 - a_{11}}{a_{12}} B_1 + \frac{A_1}{a_{12}} .$$

Das Differentialgleichungssystem (G') hat demnach die Lösung

$$\text{(60)} \qquad \begin{cases} y_1 = e^{r_0 x}(A_1 x + B_1), \\ y_2 = e^{r_0 x}\left(\dfrac{r_0 - a_{11}}{a_{12}}(A_1 x + B_1) + \dfrac{A_1}{a_{12}}\right) \end{cases}$$

mit den willkürlichen Konstanten A_1, B_1.

Beispiele.

1. $$\frac{dy_1}{dx} + 5y_1 - 3y_2 = 0, \quad \frac{dy_2}{dx} + 15y_1 - 7y_2 = 0 .$$

Lösung.

$$y_1 = e^x(A \cos 3x + B \sin 3x),$$
$$y_2 = e^x((2A + B)\cos 3x + (2B - A)\sin 3x).$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} - 4y_1 - y_2 + 36x = 0, \\ \dfrac{dy_2}{dx} + 2y_1 - y_2 + 2e^x = 0 . \end{cases}$$

Lösung.

$$y_1 = 6x - 1 - e^x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x},$$
$$y_2 = 12x + 10 + 3e^x - 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{3x}.$$

Entsprechend den von y_1 und y_2 unabhängigen Gliedern $36x$ und $2e^x$ sucht man zunächst eine partikuläre Lösung von der Form

$$y_i = \alpha_i x + \beta_i + \gamma_i e^x \qquad (i = 1, 2);$$

sodann integriert man das System homogener linearer Differentialgleichungen, welches durch Weglassung der genannten Glieder entsteht.

§ 28. Kleine Schwingungen mechanischer Systeme mit mehreren Freiheitsgraden.

Die Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten finden eine wichtige Anwendung in der Theorie der kleinen Schwingungen eines mechanischen Systems mit einer endlichen Anzahl n von Freiheitsgraden.

Wir stellen die jeweilige Lage des Systems durch die von der Zeit t abhängigen Größen $x_1, \ldots, x_n$ dar, welche wir als Koordinaten bezeichnen. Die potentielle Energie V sei nur von den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ abhängig. In der Umgebung der Stelle $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, die wir mit O bezeichnen, lasse sich V in eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$ entwickeln, in welcher nur Glieder zweiten und höheren Grades vorkommen. Die quadratischen Glieder sollen eine positive quadratische Form bilden:

$$V_2 = \tfrac{1}{2}\sum_{ik} b_{ik} x_i x_k; \qquad b_{ik} = b_{ki} \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

so daß V_2 nur für $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ verschwindet, für alle anderen Werte von $x_1, \ldots, x_n$ aber positiv ist. Dann ist die Stelle O, welcher ein Minimum der potentiellen Energie V entspricht, eine stabile Gleichgewichtslage. Wenn

$$x_1' = \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \quad x_n' = \frac{dx_n}{dt}$$

gesetzt wird, ist die kinetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{ik} A_{ik} x_i' x_k'; \qquad A_{ik} = A_{ki} \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

eine positive quadratische Form von $x_1', \ldots, x_n'$; A_{ik} sei in eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$ entwickelbar und nehme an der Stelle O den Wert a_{ik} an.

Die Bewegung des mechanischen Systems wird durch die Lagrangeschen Differentialgleichungen dargestellt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i'} = \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Wir betrachten hier nur die in der Nähe der Gleichgewichtslage O verlaufenden Bewegungen, die kleinen Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage.

Da hierbei die Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ nur kleine Werte annehmen, beschränkt man sich in der üblichen Näherungstheorie auf die quadratischen Glieder in der Entwicklung der potentiellen Energie V; man setzt also

$$V = V_2 = \tfrac{1}{2}\sum_{ik} b_{ik} x_i x_k .$$

Man ersetzt ferner in T die Funktion A_{ik} durch den Wert a_{ik}, welchen sie in O annimmt, so daß die kinetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{ik} a_{ik} x_i' x_k'$$

als positive quadratische Form von $x_1', \ldots, x_n'$ mit konstanten Koeffizienten erscheint; d. h. T verschwindet nur für $x_1' = 0, \ldots, x_n' = 0$ und ist für alle anderen Wertsysteme $x_1', \ldots, x_n'$ positiv. Jetzt ist

$$\frac{\partial T}{\partial x_i'} = a_{i1} x_1' + \cdots + a_{in} x_n' , \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = b_{i1} x_1 + \cdots + b_{in} x_n ,$$

und die Lagrangeschen Differentialgleichungen schreiben sich

$$(61) \quad a_{i1}\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \cdots + a_{in}\frac{d^2 x_n}{dt^2} + b_{i1} x_1 + \cdots + b_{in} x_n = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Wir benutzen einige Sätze aus der Theorie der Determinanten und der quadratischen Formen.

Wir setzen

$$(62) \qquad f(s) = \begin{vmatrix} s a_{11} - b_{11}, \ldots, s a_{1n} - b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s a_{n1} - b_{n1}, \ldots, s a_{nn} - b_{nn} \end{vmatrix} .$$

Unter der Voraussetzung, daß $a_{ik} = a_{ki}$ und $b_{ik} = b_{ki}$ reelle Größen sind und die quadratische Form

$$\varphi = \sum a_{ik} x_i x_k$$

definit[1]) ist, gilt der folgende Satz:

Die Gleichung $f(s) = 0$ ist vom n^{ten} (nicht von geringerem) Grad und hat lauter reelle Wurzeln; ist $s = s_0$ eine μ-fache Wurzel, so ist die Determinante $f(s_0)$ vom Rang $n - \mu$, d. h. es

---

[1]) Wir nennen die Form φ definit (positiv oder negativ), wenn sie nur für das Wertsystem $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ verschwindet, für alle anderen Wertsysteme $x_1, \ldots, x_n$ aber nur positive oder nur negative Werte annimmt. Wir setzen demnach voraus, daß die definite Form nicht singulär ist, also die Determinante $|a_{ik}| (i, k = 1, \ldots, n)$ nicht verschwindet.

verschwinden alle $(n-\mu+1)$-reihigen Unterdeterminanten, während mindestens eine $(n-\mu)$-reihige Unterdeterminante von Null verschieden ist.

Wenn die beiden Formen

$$\varphi = \sum a_{ik} x_i x_k , \qquad \psi = \sum b_{ik} x_i x_k$$

positiv definit sind, sind die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ sämtlich positiv[1]).

Um die Differentialgleichungen (61) zu integrieren, setzen wir

$$x_1 = C_1 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \lambda t , \ \ldots , \quad x_n = C_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \lambda t ;$$

durch Einsetzen in (61) erhalten wir die Gleichungen

$$(\lambda^2 a_{i1} - b_{i1}) C_1 + \cdots + (\lambda^2 a_{in} - b_{in}) C_n = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) ,$$

welche nur bestehen können, wenn die Determinante $f(\lambda^2)$ verschwindet. Jeder der n positiven Wurzeln $s = \lambda_k^2$ $(k = 1, \ldots, n)$ der Gleichung $f(s) = 0$ entspricht ein System von Konstanten $C_1 = C_{1k}, \ldots, C_n = C_{nk}$, welches den Gleichungen

$$(63) \qquad (\lambda_k^2 a_{i1} - b_{i1}) C_{1k} + \cdots + (\lambda_k^2 a_{in} - b_{in}) C_{nk} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

genügt. Ist λ_k^2 eine einfache Wurzel, so sind die Verhältnisse der Größen $C_{1k}, \ldots, C_{nk}$ bestimmt. Die Differentialgleichungen (61) haben die partikuläre Lösung

$$x_i = C_{ik}(a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit den willkürlichen Konstanten a_k, b_k. Aus diesen partikulären Lösungen setzt sich die allgemeine Lösung

$$(64) \quad x_i = C_{i1}(a_1 \cos \lambda_1 t + b_1 \sin \lambda_1 t) + \cdots + C_{in}(a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit den $2n$ willkürlichen Konstanten $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ zusammen.

Ist $\lambda_1^2 = \cdots = \lambda_\mu^2$ eine μ-fache Wurzel der Gleichung $f(s) = 0$, so ist für $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, \ldots, \mu)$ die Determinante $f(\lambda^2)$ vom Rang $n - \mu$, d. h. es verschwinden alle $(n - \mu + 1)$-reihigen Unterdeterminanten von $f(\lambda^2)$, während mindestens eine $(n - \mu)$-reihige Unterdeterminante von Null verschieden ist. Ist beispielsweise die Determinante

$$|\lambda_k^2 a_{ij} - b_{ij}| \qquad (i, j = \mu + 1, \ldots, n)$$

von Null verschieden, so lassen sich aus den $n - \mu$ Gleichungen

$$(\lambda_k^2 a_{i1} - b_{i1}) C_{1k} + \cdots + (\lambda_k^2 a_{in} - b_{in}) C_{nk} = 0 \qquad (i = \mu + 1, \ldots, n)$$

---

[1]) Vgl. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, 2. Aufl. (1925), 8. u. 12. Kap. — Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, deutsch von Beck, 2. Aufl. (1925), Kap. 13. — Whittaker, Analytische Dynamik (1924), § 78.

die $n - \mu$ Größen $C_{\mu+1,k}, \ldots, C_{nk}$ berechnen, nachdem $C_{1k}, \ldots, C_{\mu k}$ willkürlich gewählt sind. Wird die Wahl der Größen $C_{1k}, \ldots, C_{\mu k} (k = 1, \ldots, \mu)$ so getroffen, daß die Determinante $|C_{ik}|$ $(i, k = 1, \ldots, \mu)$ nicht verschwindet, so haben wir μ linear unabhängige Lösungen, welche der μ-fachen Wurzel $\lambda_1^2 = \cdots = \lambda_\mu^2$ der Gleichung $f(\lambda^2) = 0$ entsprechen. Die allgemeine Lösung erscheint in allen Fällen in der Form (64).

Es ist bemerkenswert, daß Glieder, welche t außerhalb der trigonometrischen Funktionen enthalten (sogenannte säkulare Glieder), auch im Falle mehrfacher Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ nicht vorkommen.

Zu demselben Ergebnis gelangt man, indem man die Differentialgleichungen (61) durch eine lineare Transformation der Koordinaten vereinfacht. Wir denken uns an Stelle der ursprünglichen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ vermittels der (reellen) linearen Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= C_{11} X_1 + \cdots + C_{1n} X_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= C_{n1} X_1 + \cdots + C_{nn} X_n, \end{aligned}$$

deren Determinante

$$\begin{vmatrix} C_{11}, & \ldots, & C_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1}, & \ldots, & C_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, die sogenannten Hauptkoordinaten $X_1, \ldots, X_n$ eingeführt, so daß T und V in der Form erscheinen:

$$T = \tfrac{1}{2}(X_1'^2 + \cdots + X_n'^2),$$
$$V = \tfrac{1}{2}(\lambda_1^2 X_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 X_n^2)\ ^1).$$

Die Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial X_i'} = -\frac{\partial V}{\partial X_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

haben jetzt die einfache Gestalt:

$$\frac{d^2 X_i}{dt^2} + \lambda_i^2 X_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{65}$$

Sie besitzen die allgemeine Lösung

$$X_i = a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{66}$$

mit den $2n$ willkürlichen Konstanten $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$. Daraus ergeben sich für die ursprünglichen Koordinaten wieder die Ausdrücke (64).

---

[1]) Whittaker, Analytische Dynamik, §§ 77—78.

Fünftes Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen; weitere Untersuchungen im reellen Gebiet.

§ 29. Über die Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P_1\frac{dy}{dx} + P_2 y = 0,$$

deren Koeffizienten P_1, P_2 im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktionen der reellen Veränderlichen x sind. Nach § 19 sind sämtliche Integrale der Differentialgleichung im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig. Wir beschränken uns auf die reellen Integrale, deren reelle Nullstellen wir untersuchen wollen.

Ein Integral y der Differentialgleichung (A) kann nur einfache Nullstellen besitzen.

Denn wäre $x = \alpha$ eine mehrfache Nullstelle, so wäre für $x = \alpha$ $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$. Die durch diese Anfangsbedingungen bestimmte Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung (A) ist $y \equiv 0$. Eine nicht identisch verschwindende Lösung hat also keine mehrfache Nullstelle.

Die Nullstellen eines Integrals der Differentialgleichung (A) können keine Häufungsstelle haben.

Denn wäre $x = \alpha$ eine Häufungsstelle von Nullstellen eines nicht identisch verschwindenden Integrals y, so wäre eine Folge von Nullstellen α_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$ vorhanden. Es wäre

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y(\alpha_n) - y(\alpha)}{\alpha_n - \alpha} = y'(\alpha).$$

Aus $y(\alpha_n) = 0$ folgt, da y stetig ist, $y(\alpha) = 0$; es müßte also $y'(\alpha) = 0$ sein und daher y identisch verschwinden.

Die Lösung y_1 habe im Intervall $a \leqq x \leqq b$ die beiden aufeinanderfolgenden Nullstellen α, β. Wir zeigen, daß jede andere Lösung y_2, die von y_1 linear unabhängig ist, zwischen α und β verschwindet. Für $x = \alpha$ und für $x = \beta$ kann die Lösung y_2 nicht verschwinden, denn sonst unterschiede sie sich von y_1 nur um einen konstanten Faktor. Wenn y_2 zwischen α und β nicht verschwindet, ist

$$u = \frac{y_1}{y_2}$$

eine im Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ stetige Funktion, welche für $x = \alpha$ und für $x = \beta$ verschwindet. Daher muß die Ableitung

$$\frac{du}{dx} = \frac{y_2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx}}{y_2^2}$$

in einem zwischen α und β gelegenen Punkt verschwinden. Dies steht aber im Widerspruch mit der Tatsache, daß die Determinante

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx}$$

m Intervall $a \leqq x \leqq b$ nirgends verschwindet (§ 20). Es muß also zwischen α und β eine Nullstelle von y_2 liegen.

Wären zwischen α und β zwei Nullstellen von y_2 vorhanden, so müßte zwischen diesen beiden Nullstellen von y_2 eine Nullstelle von y_1 liegen; α und β wären also nicht aufeinanderfolgende Nullstellen von y_1. Damit ist gezeigt, daß zwischen α und β genau eine Nullstelle von y_2 liegt.

Wir können also den Satz aussprechen:

Die Nullstellen zweier linear unabhängiger Integrale der Differentialgleichung (A) trennen sich gegenseitig.

Die Differentialgleichung (A) kann nach § 25, indem man vermöge der Substitution

$$y = z e^{-\frac{1}{2}\int P_1 dx}$$

an Stelle von y die neue abhängige Veränderliche z einführt, auf die Form

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(P_2 - \frac{1}{4}P_1^2 - \frac{1}{2}\frac{dP_1}{dx}\right) z = 0$$

gebracht werden. Wir setzen voraus, daß P_1 eine stetige Ableitung besitzt.

Demgemäß betrachten wir jetzt eine Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \varrho(x)\, y = 0\,,$$

wo $\varrho(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig sein möge. Wir vergleichen damit die Differentialgleichung

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^2z}{dx^2} + \sigma(x)z = 0\,;$$

für $a \leqq x \leqq b$ sei $\sigma(x)$ ebenfalls stetig und

$$\varrho(x) < \sigma(x)\,.$$

Aus den Gleichungen (B) und (C) folgt

$$z\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \varrho y\right) - y\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \sigma z\right) = 0$$

oder

$$z\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right) = (\sigma - \varrho)\,yz$$

oder, wenn $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ ist,

$$\text{(1)} \qquad \left[zy' - yz'\right]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (\sigma - \varrho)\,yz\,dx\,.$$

Wir beweisen den Satz:

Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen α und β einer Lösung y der Differentialgleichung (B) liegt mindestens eine Nullstelle einer beliebigen Lösung z der Differentialgleichung (C).

Es sei $y(\alpha) = 0$, $y(\beta) = 0$ und z. B. $y > 0$ für $\alpha < x < \beta$; dann ist $y'(\alpha) > 0$, $y'(\beta) < 0$. (Es kann nicht gleichzeitig $y(\alpha) = 0$, $y'(\alpha) = 0$ sein, weil sonst y identisch verschwinden müßte.) Wir nehmen an, eine gewisse Lösung z der Differentialgleichung (C) habe für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ dasselbe, z. B. das positive Vorzeichen. Die Gleichung (1) schreibt sich

$$z(\beta)\,y'(\beta) - z(\alpha)\,y'(\alpha) = \int_\alpha^\beta (\sigma - \varrho)\,yz\,dx\,.$$

Die linke Seite ist negativ, die rechte Seite wegen $\sigma - \varrho > 0$ positiv, so daß ein Widerspruch besteht. Der Widerspruch bleibt bestehen, wenn eine der beiden Größen $z(\alpha)$, $z(\beta)$ oder beide verschwinden, während sonst z positiv ist; denn dann ist die linke Seite negativ oder Null. Daher muß z zwischen α und β verschwinden.

Wenn an Stelle der Voraussetzung $\varrho(x) < \sigma(x)$ die Voraussetzung $\varrho(x) \leqq \sigma(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ gemacht wird, ist die linke Seite positiv oder Null; sie ist gleich Null, wenn für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ $\varrho(x) = \sigma(x)$ ist; in diesem Fall kann für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ $z = y$ gesetzt werden, so daß $z(x) > 0$ für $\alpha < x < \beta$, aber $z(\alpha) = 0$, $z(\beta) = 0$ ist; demnach verschwindet auch die linke Seite.

Die Funktion $\varrho(x)$ sei jetzt im Intervall $a \leqq x \leqq b$ positiv, und zwar sei M ihr Maximum und $m > 0$ ihr Minimum.

Wir vergleichen die Differentialgleichung (B) mit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + Mz = 0. \tag{2}$$

Sind α und $\beta > \alpha$ zwei aufeinanderfolgende Nullstellen einer Lösung y der Differentialgleichung (B), so muß wegen $\varrho(x) \leqq M$ zwischen α und β eine Nullstelle einer jeden Lösung z der Differentialgleichung (2) liegen. Ausnahmsweise sind α und β aufeinanderfolgende Nullstellen von z. Die Lösung

$$z = \sin\left((x-\alpha)\sqrt{M}\right)$$

von (2) hat aber zwischen α und $\alpha + \frac{\pi}{\sqrt{M}}$ keine Nullstelle. Daher ist

$$\beta - \alpha \geqq \frac{\pi}{\sqrt{M}}.$$

Wenn $b - a < \frac{\pi}{\sqrt{M}}$ ist, kann keine Lösung der Differentialgleichung (B) im Intervall $a \leqq x \leqq b$ zwei Nullstellen besitzen.

Wir betrachten jetzt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + mu = 0 \tag{3}$$

in Verbindung mit der Differentialgleichung (B). Die Lösung

$$u = \sin\left((x-\alpha)\sqrt{m}\right)$$

von (3) hat die benachbarten Nullstellen α und $\alpha + \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Zwischen diesen liegt wegen $m \leqq \varrho(x)$ eine Nullstelle eines jeden Integrals y der Differentialgleichung (B). Hat ein Integral y die beiden benachbarten Nullstellen α und $\beta > \alpha$, so ist

$$\beta - \alpha \leqq \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

Wir können also den Satz aussprechen:

Sind α und $\beta > \alpha$ zwei aufeinanderfolgende Nullstellen eines Integrals y der Differentialgleichung (B), so ist

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leqq \beta - \alpha \leqq \frac{\pi}{\sqrt{m}},$$

wo $m > 0$ das Minimum und $M > m$ das Maximum der positiven Funktion $\varrho(x)$ bezeichnet.

Wenn im Intervall $a \leqq x \leqq b$ $\varrho(x) \leqq 0$, also $M \leqq 0$ ist, so hat die Differentialgleichung (2) das nicht verschwindende Integral $z = e^{x\sqrt{-M}}$. Zwischen zwei Nullstellen eines Integrals y der Differentialgleichung (B) müßte eine Nullstelle von z liegen. Es gilt also der Satz:

In einem Intervall, in welchem $\varrho(x) \leqq 0$ ist, kann kein Integral der Differentialgleichung (B) zwei Nullstellen besitzen[1]).

§ 30. Lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.

Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung, deren Koeffizienten stetige periodische Funktionen der reellen Veränderlichen x sind, und zwar der Einfachheit halber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(D)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)\, y = 0\,.$$

Es sei

$$P_i(x+\omega) = P_i(x) \qquad (i = 1, 2)\,,$$

so daß die Funktionen P_1, P_2 die Periode ω besitzen.

Nach § 19 ist jede Lösung der Differentialgleichung (D) eine für alle endlichen Werte von x stetige Funktion von x. Die beiden Lösungen y_1, y_2 mögen ein Fundamentalsystem bilden, so daß keine lineare homogene Beziehung $c_1y_1 + c_2y_2 = 0$ mit konstanten Koeffizienten c_1, c_2 besteht. Da die Differentialgleichung (D) ungeändert bleibt, wenn man x durch $x + \omega$ ersetzt, so besitzt sie auch die Lösung $\bar{y}_1, \bar{y}_2$, die aus y_1, y_2 dadurch hervorgeht, daß man x durch $x + \omega$ ersetzt. Die Funktionen $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ lassen sich als lineare homogene Funktionen von y_1, y_2 mit konstanten Koeffizienten $a_{11}, \ldots, a_{22}$ darstellen:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \bar{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2\,, \\ \bar{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2\,. \end{cases}$$

Die Funktionen $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ bilden ein Fundamentalsystem; denn wenn eine Gleichung $c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2 = 0$ mit konstanten Koeffizienten c_1, c_2 für alle x bestände, so ginge daraus, wenn man x durch $x - \omega$ ersetzt, die Gleichung $c_1y_1 + c_2y_2 = 0$ hervor. Die Determinante

$$\text{(5)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}$$

[1]) Die Randwertaufgaben für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen, die man hier anschließen könnte, werden in dem Bande „Partielle Differentialgleichungen" behandelt, weil sie in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen benutzt werden und weil auf sie dieselben Methoden angewandt werden können wie auf die Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen.

ist von Null verschieden, denn das Verschwinden dieser Determinante hätte eine lineare Gleichung zwischen $\bar{y}_1$ und $\bar{y}_2$ zur Folge. Wir sagen: das Fundamentalsystem y_1, y_2 der Differentialgleichung (D) erfährt bei der Vermehrung von x um die Periode ω die durch die Gleichungen (4) dargestellte lineare Substitution S.

An Stelle des Fundamentalsystems y_1, y_2 führen wir ein anderes Fundamentalsystem Y_1, Y_2 ein, welches bei der Vermehrung von x um ω eine möglichst einfache Substitution erfährt.

Zunächst suchen wir zwei Konstante γ_1, γ_2 so zu bestimmen, daß die Funktion

$$Y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 \tag{6}$$

in

$$\bar{Y} = sY \tag{7}$$

übergeht, wo s eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet. Es soll also

$$\gamma_1 \bar{y}_1 + \gamma_2 \bar{y}_2 = s(\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2)$$

sein oder, wenn man $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ nach (4) durch y_1, y_2 ausdrückt,

$$\gamma_1(a_{11} y_1 + a_{12} y_2) + \gamma_2(a_{21} y_1 + a_{22} y_2) - s(\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2) = 0.$$

Durch Nullsetzen der Koeffizienten von y_1 und y_2 erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{cases} (a_{11} - s)\gamma_1 + a_{21}\gamma_2 = 0, \\ a_{12}\gamma_1 + (a_{22} - s)\gamma_2 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Damit diese Gleichungen durch Werte γ_1, γ_2 befriedigt werden, welche nicht beide verschwinden, ist notwendig und hinreichend, daß s der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{21} \\ a_{12} & , a_{22} - s \end{vmatrix} = s^2 - (a_{11} + a_{22})s + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \tag{9}$$

genügt, der Fundamentalgleichung der Substitution S. Die Wurzeln der Gleichung (9) sind von Null verschieden, da die Determinante (5) nicht verschwindet.

Wir nehmen zunächst an, die Gleichung (9) habe zwei verschiedene Wurzeln s_1, s_2. Die Gleichungen (8) werden, wenn man $s = s_i$ $(i = 1, 2)$ setzt, durch Werte $\gamma_1 = \gamma_{i1}$, $\gamma_2 = \gamma_{i2}$ befriedigt. Dann gehen die beiden Funktionen

$$Y_i = \gamma_{i1} y_1 + \gamma_{i2} y_2 \qquad (i = 1, 2) \tag{10}$$

bei der Vermehrung von x um ω in

$$\bar{Y}_i = s_i Y_i \qquad (i = 1, 2) \tag{11}$$

über. Die Funktionen Y_1, Y_2 bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (D). Denn eine lineare Gleichung

$$C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = 0,$$

in welcher die konstanten Koeffizienten C_1, C_2 nicht verschwinden, ginge bei einer Vermehrung von x um ω, d. h. bei Ersetzung von Y_i durch $s_i Y_i$ in

$$s_1 C_1 Y_1 + s_2 C_2 Y_2 = 0$$

über; diese Gleichung kann aber mit der vorhergehenden nur zusammen bestehen, wenn $s_1 = s_2$ ist.

Wir nehmen jetzt an, die Gleichung (9) habe die Doppelwurzel s_0, so daß

$$s_0 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$$

ist.

Im Falle $a_{12} = a_{21} = 0$, $s_0 = a_{11} = a_{22}$ ist von vornherein

$$\bar{y}_1 = s_0 y_1, \quad \bar{y}_2 = s_0 y_2. \tag{12}$$

Sonst ist entweder a_{12} oder a_{21} von Null verschieden. Wir nehmen $a_{21} \neq 0$ an. Die Gleichungen (8) werden für $s = s_0$ durch $\gamma_1 = a_{21}$, $\gamma_2 = s_0 - a_{11}$ befriedigt. Die Funktion

$$Y_1 = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 = a_{21} y_1 + (s_0 - a_{11}) y_2$$

geht bei der Ersetzung von x durch $x + \omega$ in

$$\bar{Y}_1 = s_0 Y_1$$

über. Setzt man $Y_2 = y_2$, so ist

$$Y_2 = \bar{y}_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 = Y_1 + (a_{11} + a_{22} - s_0) Y_2 = s_0 Y_2 + Y_1.$$

Wir haben also jetzt ein Fundamentalsystem Y_1, Y_2, welches bei Vermehrung von x um ω die Substitution erfährt:

$$\bar{Y}_1 = s_0 Y_1, \quad \bar{Y}_2 = s_0 Y_2 + Y_1. \tag{13}$$

Das Fundamentalsystem Y_1, Y_2, welches die Substitution (11) erfährt, läßt sich folgendermaßen darstellen. Setzt man $s_i = e^{r_i \omega}$ $(i = 1, 2)$, so geht $e^{r_i x}$ bei Vermehrung von x um ω in

$$e^{r_i x} e^{r_i \omega} = s_i e^{r_i x}$$

über; da Y_i in $s_i Y_i$ übergeht, so bleibt

$$\varphi_i(x) = \frac{Y_i}{e^{r_i x}}$$

ungeändert; es ist also

$$Y_i = e^{r_i x} \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2), \tag{14}$$

wo $\varphi_i(x)$ die Periode ω hat.

Ein Fundamentalsystem, welches die Substitution (12) erfährt, gestattet die Darstellung

$$Y_i = e^{r_0 x}\varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2), \tag{15}$$

wo $s_0 = e^{r_0 \omega}$ und $\varphi_i(x + \omega) = \varphi_i(x)$ ist.

Im Falle der Substitution (13) ist

$$\begin{cases} Y_1 = e^{r_0 x}\varphi_1(x), \\ Y_2 = e^{r_0 x}\left(\varphi_2(x) + \dfrac{x}{s_0\omega}\varphi_1(x)\right), \end{cases} \tag{16}$$

wo $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ die Periode ω haben. Die Periodizität von φ_1 ergibt sich wie früher. Die Funktion

$$\varphi_2 = \frac{Y_2}{e^{r_0 x}} - \frac{x}{s_0\omega}\varphi_1$$

geht, wenn x um ω vermehrt wird, in

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{s_0 Y_2 + Y_1}{s_0 e^{r_0 x}} - \frac{x + \omega}{s_0\omega}\varphi_1$$

über, es ist also

$$\bar{\varphi}_2 - \varphi_2 = \frac{1}{s_0}\left(\frac{Y_1}{e^{r_0 x}} - \varphi_1\right) = 0.$$

Es gilt der Satz:

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (D), deren Koeffizienten stetige Funktionen mit der Periode ω sind, besitzt ein Fundamentalsystem

$$Y_i = e^{r_i x}\varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2)$$

oder ein Fundamentalsystem

$$Y_1 = e^{r_0 x}\varphi_1(x), \quad Y_2 = e^{r_0 x}(\varphi_2(x) + c x \varphi_1(x)).$$

Die φ sind stetige periodische Funktionen mit der Periode ω. Sind s_1, s_2 einfache Wurzeln bzw. s_0 Doppelwurzel der Fundamentalgleichung (9), so ist $s_i = e^{r_i \omega}$ $(i = 1, 2)$ bzw. $s_0 = e^{r_0 \omega}$; c ist eine Konstante, die auch verschwinden kann.

§ 31. Durchführung und Beispiel.

Die Differentialgleichung (D) wird durch die Substitution

$$y = z e^{-\frac{1}{2}\int P_1 dx}$$

in

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(P_2 - \frac{1}{4}P_1^2 - \frac{1}{2}\frac{dP_1}{dx}\right) z = 0$$

übergeführt.

Wir können daher, wenn P_1 eine stetige Ableitung besitzt, an Stelle von (D) die Differentialgleichung

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P(x)y = 0$$

behandeln, wo $P(x+\omega) = P(x)$ ist. Jetzt ist nach § 25 die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}$$

konstant; sie bleibt also ungeändert, wenn man x durch $x+\omega$ ersetzt. Demnach ist

$$\begin{vmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_1' \\ \bar{y}_2 & \bar{y}_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2, & a_{11}y_1' + a_{12}y_2' \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2, & a_{21}y_1' + a_{22}y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix},$$

also

$$\text{(17)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1.$$

Die Fundamentalgleichung (9) ist jetzt

$$\text{(18)} \qquad s^2 - (a_{11} + a_{22})s + 1 = 0,$$

also $s_1 s_2 = 1$; im Falle $a_{11} + a_{22} = \pm 2$ ist eine Doppelwurzel $s_0 = \pm 1$ vorhanden.

Wir verstehen unter y_1, y_2 die partikulären Lösungen der Differentialgleichung (E), welche durch die Anfangsbedingungen

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 1, & y_1'(0) = 0, \\ y_2(0) = 0, & y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

bestimmt sind. Wenn man in den Gleichungen

$$\text{(20)} \qquad \begin{cases} y_1(x+\omega) = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x), \\ y_2(x+\omega) = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) \end{cases}$$

und den daraus durch Differentiation hervorgehenden

$$\text{(21)} \qquad \begin{cases} y_1'(x+\omega) = a_{11}y_1'(x) + a_{12}y_2'(x), \\ y_2'(x+\omega) = a_{21}y_1'(x) + a_{22}y_2'(x) \end{cases}$$

$x = 0$ setzt und die Anfangsbedingungen (19) beachtet, erhält man

$$\text{(22)} \qquad \begin{cases} a_{11} = y_1(\omega), & a_{12} = y_1'(\omega), \\ a_{21} = y_2(\omega), & a_{22} = y_2'(\omega). \end{cases}$$

Wenn wir $s_1 = e^{r\omega}$, $s_2 = \dfrac{1}{s_1} = e^{-r\omega}$ setzen, geht die Gleichung $s_1 + s_2 = a_{11} + a_{22}$ über in

$$\text{(23)} \qquad \frac{e^{r\omega} + e^{-r\omega}}{2} = \mathfrak{Cof}\, r\omega = \cos ir\omega = \frac{y_1(\omega) + y_2'(\omega)}{2}.$$

Als Beispiel betrachten wir die in der Astronomie und mathematischen Physik vorkommende Differentialgleichung

$$\text{(F)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (a + b\cos x)\, y = 0.$$

Setzt man $x = -\mathfrak{x}$, so geht die Differentialgleichung (F) in

$$\frac{d^2y}{d\mathfrak{x}^2} + (a + b\cos\mathfrak{x})\, y = 0$$

und die Bedingungen $y = 1$, $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = 0$, welche die Lösung y_1 bestimmen, in $y = 1$, $\frac{dy}{d\mathfrak{x}} = 0$ für $\mathfrak{x} = 0$ über; es ist also $y_1(x) = y_1(\mathfrak{x}) = y_1(-x)$, d. h. y_1 ist eine gerade und daher y_1' eine ungerade Funktion von x. Setzt man $x = -\mathfrak{x}$, $y = -\mathfrak{y}$, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2} + (a + b\cos\mathfrak{x})\, \mathfrak{y} = 0;$$

die zur Bestimmung von y_2 dienenden Bedingungen $y = 0, \frac{dy}{dx} = 1$ für $x = 0$ werden $\mathfrak{y} = 0, \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 1$ für $\mathfrak{x} = 0$, es ist also $y(x) = \mathfrak{y}(\mathfrak{x}) = -y(-x)$ für $y = y_2$, d. h. y_2 ist eine ungerade und folglich y_2' eine gerade Funktion von x.

Wir haben jetzt die Periode $\omega = 2\pi$ und nach (22)

$$a_{11} = y_1(2\pi),\ a_{12} = y_1'(2\pi),\ a_{21} = y_2(2\pi),\ a_{22} = y_2'(2\pi).$$

Die Gleichungen (20) für $\omega = 2\pi$ lösen wir unter Berücksichtigung der Gleichung (17) nach $y_1(x)$ auf:

$$y_1(x) = a_{22}y_1(x + 2\pi) - a_{12}y_2(x + 2\pi);$$

setzt man hierin $x = -2\pi$ und beachtet man, daß $y_1(-2\pi) = y_1(2\pi)$, $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$ ist, so erhält man

$$a_{22} = y_1(2\pi).$$

Es ist also $a_{11} = a_{22} = y_1(2\pi)$, und die Fundamentalgleichung (18) wird

$$s^2 - 2y_1(2\pi)\cdot s + 1 = 0$$

oder

$$\frac{s + \frac{1}{s}}{2} = y\,(2\pi),$$

also, wenn man $r = ih$, $s = e^{2\pi ih}$ setzt,

$$\text{(24)} \qquad \cos 2h\pi = y_1(2\pi).$$

Nach 50 läßt sich y_1 in eine beständig konvergente Reihe nach Potenzen des Parameters b entwickeln. Setzt man die Reihe

$$y_1 = Y_0 + bY_1 + b^2 Y_2 + \cdots \tag{25}$$

in die Differentialgleichung (F) ein und vergleicht man die Koeffizienten der Potenzen von b, so erhält man zur Bestimmung von $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ die elementar integrierbaren linearen Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2Y_0}{dx^2} + aY_0 = 0, \\ &\frac{d^2Y_1}{dx^2} + aY_1 + Y_0 \cos x = 0, \\ &\frac{d^2Y_2}{dx^2} + aY_2 + Y_1 \cos x = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Damit $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ wird, unterwerfen wir die Funktionen Y_0, $Y_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ den Anfangsbedingungen $Y_0(0) = 1$, $Y_0'(0) = 0$; $Y_\nu(0) = 0$, $Y_\nu'(0) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Ohne die Rechnung durchzuführen, geben wir die Fundamentalgleichung an, die man durch dieses Verfahren erhält, wenn $a = q^2$ und q keine ganze Zahl ist:

$$\cos 2h\pi = \cos 2q\pi + \sin 2q\pi \cdot \frac{b^2\pi}{2q(4q^2 - 1)} + \cdots; \tag{27}$$

die weggelassenen Glieder enthalten mindestens die vierte Potenz von b.

Sechstes Kapitel.

Existenzbeweise im komplexen Gebiet.

§ 32. Existenz der Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung.

In der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

seien jetzt x, y komplexe Veränderliche, wie auch allen im folgenden vorkommenden Größen komplexe Werte beigelegt werden dürfen. Die analytische Funktion $f(x, y)$ verhalte sich in der Umgebung der Stelle $x = a$, $y = b$ regulär und zwar mindestens in dem Bereich

$$|x - a| \leqq h, \qquad |y - b| \leqq H,$$

so daß sie in eine in diesem Bereich konvergente Potenzreihe von $x - a$, $y - b$ entwickelbar ist; für alle Stellen x, y dieses Bereichs sei

$$|f(x, y)| \leqq M$$

und

$$\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \leqq K.$$

Sind x, y und x, Y zwei beliebige Stellen des obigen Bereichs, so ist

$$f(x, Y) - f(x, y) = \int_y^Y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dy;$$

der geradlinig angenommene Integrationsweg hat die Länge $|Y - y|$, und der absolute Betrag der zu integrierenden Funktion übersteigt nirgends den Wert K; daher ist

$$|f(x, Y) - f(x, y)| \leqq K|Y - y|$$

(Lipschitzsche Bedingung).

Wir suchen eine analytische Funktion y von x zu bestimmen, welche für $x = a$ den Wert $y = b$ annimmt und der Differentialgleichung (A) genügt.

Wir übertragen die in § 11 dargestellte Methode der schrittweisen Annäherung auf das komplexe Gebiet.

Wir setzen $y_0 = b$; wir bestimmen, unter n nacheinander die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ verstehend, die Funktion y_n von x aus der Differentialgleichung

$$\frac{dy_n}{dx} = f(x, y_{n-1}), \tag{1}$$

indem wir festsetzen, daß $y_n = b$ für $x = a$ sein soll.

Wir verstehen unter ϱ die kleinere der beiden positiven Größen

$$h, \quad \frac{H}{M}$$

und beschränken die komplexe Veränderliche x auf das Gebiet $|x - a| \leqq \varrho$.

Dann ist für jeden Wert von n

$$|y_n - b| \leqq H. \tag{2}$$

Hat man nämlich nachgewiesen, daß

$$|y_\nu - b| \leqq H \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ist, so ist

$$y_n - b = \int_a^x f(x, y_{n-1})\, dx;$$

wegen $|f(x, y_{n-1})| \leqq M$ hat man

$$|y_n - b| \leqq M|x - a| \leqq M\varrho \leqq H.$$

Ferner ist für $n = 1, 2, \ldots$

$$|y_n - y_{n-1}| \leqq \frac{MK^{n-1}|x - a|^n}{n!}, \tag{3}$$

solange $|x - a| \leqq \varrho$ ist. Zunächst gilt diese Ungleichung für $n = 1$, denn es ist

$$|y_1 - b| \leqq \frac{M|x - a|}{1!}.$$

Wir nehmen an, für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ sei

$$|y_\nu - y_{\nu-1}| \leqq \frac{MK^{\nu-1}|x - a|^\nu}{\nu!}.$$

Es ist

$$y_n - y_{n-1} = \int_a^x [f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})]\, dx.$$

Da die beiden Stellen x, y_{n-2} und x, y_{n-1} dem Gebiet $|x - a| \leqq h$, $|y - b| \leqq H$ angehören, so ist

$$|f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})| \leqq K|y_{n-1} - y_{n-2}| \leqq \frac{MK^{n-1}|x - a|^{n-1}}{(n-1)!};$$

demnach haben wir

$$|y_n - y_{n-1}| \leqq \frac{MK^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{|x-a|} |x-a|^{n-1}\, d|x-a| \leqq \frac{MK^{n-1}|x-a|^n}{n!},$$

wie zu beweisen war. Die Reihe

$$(4) \qquad y = b + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots$$

ist also für $|x-a| \leqq \varrho$ unbedingt und gleichmäßig konvergent.

Die durch diese Reihe dargestellte Funktion y ist eine analytische Funktion von x, welche sich für $|x-a| \leqq \varrho$ regulär verhält. Denn zunächst sind die Funktionen y_n für $|x-a| \leqq \varrho$ regulär, da sie durch wiederholte Integration regulärer Funktionen gefunden werden. Daraus, daß die Glieder $y_n - y_{n-1}$ der obigen Reihe für $|x-a| \leqq \varrho$ regulär sind und daß die Reihe für $|x-a| \leqq \varrho$ gleichmäßig konvergiert, folgt aber, daß die Reihensumme y für $|x-a| \leqq \varrho$ regulär ist.

Wie in § 11 ergibt sich, daß die Funktion

$$(5) \qquad y = \lim_{n\to\infty}[b + (y_1 - y_0) + \cdots + (y_n - y_{n-1})] = \lim_{n\to\infty} y_n$$

der Differentialgleichung (A) genügt.

Die in der Umgebung von $x = a$ reguläre Funktion y läßt sich in eine Potenzreihe von $x-a$ entwickeln, welche sicher für $|x-a| \leqq \varrho$ konvergiert. Nach dem Cauchy-Taylorschen Satz ist

$$(6) \qquad y = b + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a (x-a) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a (x-a)^2 + \cdots,$$

wo unter

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a, \quad \cdots$$

die Werte verstanden sind, welche die Ableitungen der Funktion y für $x = a$ annehmen. Wenn man die Differentialgleichung (A) wiederholt nach x differentiiert, indem man y als Funktion von x auffaßt, erhält man die Gleichungen

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2y}{dx^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Setzt man hierin $x = a$, $y = b$, so ergeben sich für

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a, \quad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_a, \quad \cdots$$

eindeutig bestimmte endliche Werte.

Die Differentialgleichung (A) besitzt also außer der gefundenen keine weitere Lösung, welche in der Umgebung von $x = a$ regulär ist und für $x = a$ den Wert $y = b$ annimmt.

Die Differentialgleichung (A) wird identisch befriedigt, wenn man für y die berechnete Potenzreihe von $x - a$ einsetzt. Nach Einsetzung dieser Reihe ist sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

eine Potenzreihe von $x - a$; nach der Art, wie oben die Größen $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a$, ... berechnet wurden, stimmt für $x = a$, $y = b$ die ν^{te} Ableitung der linken Seite mit der ν^{ten} Ableitung der rechten Seite überein, wenn ν irgendeine der Zahlen 1, 2, ... ist; folglich stimmt die linke Seite für jeden Wert von x mit der rechten Seite überein.

Wir fassen das Ergebnis von § 31 in den folgenden Satz zusammen:

In der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sei f eine analytische Funktion der Veränderlichen x, y, welche sich in dem Gebiet

$$|x - a| \leqq h, \qquad |y - b| \leqq H$$

regulär verhält. In diesem Gebiete sei

$$|f(x, y)| \leqq M.$$

Die kleinere der beiden Größen

$$h, \quad \frac{H}{M}$$

werde mit ϱ bezeichnet. Dann besitzt die Differentialgleichung (A) eine Lösung $y = \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ eine analytische Funktion von x ist, welche für $x = a$ den Wert $y = b$ annimmt und sich für $|x - a| \leqq \varrho$ regulär verhält, also in eine Potenzreihe von $x - a$ entwickelbar ist, deren Koeffizienten sich aus der Differentialgleichung berechnen lassen.

§ 33. Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten.

In der Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu)$$

sei f eine analytische Funktion der Veränderlichen x, y und des Parameters μ, welche sich in der Umgebung der Stelle $x = a$, $y = b$, $\mu = 0$ regulär verhält. Die Funktion f sei mindestens in dem Bereich

$$|x - a| \leqq h, \qquad |y - b| \leqq H, \qquad |\mu| \leqq \mathfrak{r}$$

regulär; für alle Stellen x, y, μ dieses Bereichs sei

$$|f(x, y, \mu)| \leqq M$$

und

$$\left| \frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial y} \right| \leqq K,$$

so daß die Lipschitzsche Bedingung

$$|f(x, Y, \mu) - f(x, y, \mu| \leqq K|Y - y|$$

besteht, wenn auch x, Y, μ eine Stelle des obigen Bereichs ist.

Wir setzen wie oben $y_0 = b$ und erhalten, nachdem $y_1, \ldots, y_{n-1}$ bestimmt sind, y_n aus der Formel

$$y_n - b = \int_a^x f(x, y_{n-1}, \mu)\, dx.$$

Wenn ϱ wie oben eingeführt wird, ist für $|x - a| \leqq \varrho$, $|\mu| \leqq \mathfrak{r}$

$$|y_n - y_{n-1}| \leqq \frac{M K^{n-1} |x - a|^{n-1}}{(n-1)!},$$

so daß die Reihe

$$y = b + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1})$$

für $|x - a| \leqq \varrho$, $|\mu| \leqq \mathfrak{r}$ unbedingt und gleichmäßig konvergiert. Die Reihensumme y ist eine für $|x - a| \leqq \varrho$, $|\mu| \leqq \mathfrak{r}$ reguläre Funktion von x und μ, da alle Funktionen y_n und demnach alle Glieder $y_n - y_{n-1}$ der gleichmäßig konvergenten Reihe reguläre Funktionen von x und μ sind. Alles Weitere vollzieht sich wie oben.

Ist f eine analytische Funktion mehrerer Parameter $\mu_1, \mu_2, \ldots$, so gelangt man durch dasselbe Beweisverfahren zu dem Satze:

In der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu_1, \mu_2, \ldots)$$

sei f eine analytische Funktion der Veränderlichen x, y und der Parameter μ_1, μ_2 ..., welche sich in der Umgebung der Stelle $x=a$, $y=b$, $\mu_1=\alpha_1$, $\mu_2=\alpha_2$, ... regulär verhält. Die Differentialgleichung besitzt eine Lösung

$$y=\varphi(x, \mu_1, \mu_2, \ldots),$$

wo φ eine Funktion der Veränderlichen x und der Parameter $\mu_1, \mu_2, \ldots$ ist, welche für $x=a$ den Wert $y=b$ annimmt und sich in der Umgebung der Stelle $x=a$, $\mu_1=\alpha_1$, $\mu_2=\alpha_2$, ... regulär verhält.

Wir wenden uns wieder zu der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx}=f(x, y).$$

Diejenige Funktion y, welche der Differentialgleichung (A) genügt und für $x=a$ den Wert $y=b$ annimmt, kann als Funktion der Veränderlichen x und der Anfangswerte a, b angesehen werden:

$$(8) \qquad y=\varphi(x, a, b).$$

Es ist also

$$b=\varphi(a, a, b).$$

Denkt man sich für a einen festen Zahlenwert eingesetzt, so kann b als Integrationskonstante aufgefaßt werden. Verhält sich die Funktion $f(x, y)$ in der Umgebung der Stelle $x=a^{(0)}$, $y=b^{(0)}$ regulär, so ist, wie wir sogleich sehen werden, φ eine analytische Funktion von x, a, b, welche sich in der Umgebung der Stelle

$$x=a^{(0)}, \qquad a=a^{(0)}, \qquad b=b^{(0)}$$

regulär verhält.

Setzt man nämlich

$$x=\xi+a, \qquad y=\eta+b,$$

so geht die Differentialgleichung (A) über in

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f(\xi+a, \eta+b);$$

wir betrachten f als analytische Funktion der Veränderlichen ξ, η und der Parameter a, b, welche sich in der Umgebung der Stelle $\xi=0$, $\eta=0$, $a=a^{(0)}$, $b=b^{(0)}$ regulär verhält. Nach dem oben bewiesenen Satze ist die der Differentialgleichung genügende Funktion η, welche für $\xi=0$ den Wert $\eta=0$ annimmt, eine analytische Funktion der Veränderlichen ξ und der Parameter a, b, welche sich in der Umgebung der Stelle $\xi=0$, $a=a^{(0)}$, $b=b^{(0)}$ regulär verhält. Sie kann demnach als Potenzreihe von $\xi=x-a$, $a-a^{(0)}$, $b-b^{(0)}$ und also auch, wenn man $x-a=(x-a^{(0)})-(a-a^{(0)})$ setzt, als Potenzreihe von $x-a^{(0)}$, $a-a^{(0)}$, $b-b^{(0)}$ dargestellt werden.

Die Funktion $y = \varphi(x, a, b)$ nehme für einen in der Umgebung von $x = a^{(0)}$ gelegenen Wert $x = x'$ den Wert $y = y'$ an. Nach § 31 gibt es nur eine an der Stelle $x = x'$ reguläre Lösung der Differentialgleichung (A), welche für $x = x'$ den Wert $y = y'$ annimmt. Diese Lösung, welche mit

$$y = \varphi(x, x', y')$$

zu bezeichnen ist, muß also mit der Lösung (8) übereinstimmen. Daher muß y für $x = a$ den Wert b annehmen, so daß

$$b = \varphi(a, x', y')$$

ist. Nun ist aber x' ein beliebiger Wert in der Umgebung von $a^{(0)}$, den wir auch mit x bezeichnen können, wenn wir gleichzeitig y' durch y ersetzen. Die Gleichung (8) läßt sich also in der Form schreiben:

(9) $$b = \varphi(a, x, y).$$

§ 34. Eindeutige Bestimmung einer Lösung durch die Anfangswerte.

Wir stellen uns jetzt unter a einen festen Wert vor, wir behalten die unabhängige Veränderliche x bei, führen aber an Stelle der abhängigen Veränderlichen y eine neue abhängige Veränderliche z ein, indem wir setzen:

$$z = \varphi(a, x, y)$$

oder, was dasselbe ist,

(10) $$y = \varphi(x, a, z).$$

Dadurch geht die Differentialgleichung (A) über in

$$\frac{\partial \varphi(x, a, z)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x, a, z)}{\partial z} \frac{dz}{dx} = f(x, \varphi(x, a, z)).$$

Da $y = \varphi(x, a, z)$ eine Lösung von (A) darstellt, wenn man z durch eine Konstante ersetzt (wenn $z = b$ ist), so ist

$$\frac{\partial \varphi(x, a, z)}{\partial x} = f(x, \varphi(x, a, z)).$$

Man hat also

(11) $$\frac{\partial \varphi(x, a, z)}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0.$$

Der Umgebung von $x = a$, $y = b$ entspricht zufolge der Gleichung (10) die Umgebung von $x = a$, $z = b$. Da sich φ für $x = a$ auf z reduziert, so ist für $x = a$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1.$$

Aus der Gleichung (11) folgt daher

$$\frac{dz}{dx} = 0; \tag{12}$$

d. h. z muß von x unabhängig sein, wenn die Funktion

$$y = \varphi(x, a, z)$$

der Differentialgleichung (A) genügen soll. Dabei ist x in der Nähe von a, y in der Nähe von b und demnach auch z in der Nähe von b vorausgesetzt.

Wir können nun dem in § 31 ausgesprochenen Existenztheorem eine wichtige Ergänzung hinzufügen. Wir kennen eine Lösung $y = \varphi(x, a, b)$ der Differentialgleichung (A), wo φ eine analytische Funktion von x ist, welche sich an der Stelle $x = a$ regulär verhält und für $x = a$ den Wert b annimmt. Vorausgesetzt ist dabei, daß sich die Funktion $f(x, y)$ an der Stelle $x = a$, $y = b$ regulär verhält. Aus § 31 folgt, daß es keine andere bei $x = a$ reguläre Lösung mit demselben Anfangswert geben kann. Es bleibt aber noch die folgende Frage zu beantworten: Gibt es vielleicht eine nicht reguläre oder nicht analytische Lösung y der Differentialgleichung (A), welche sich dem Werte b nähert, wenn sich die unabhängige Veränderliche x auf einem bestimmten in der komplexen Zahlenebene verlaufenden Wege C dem Punkte a nähert? Es genügt nicht, zu beweisen, daß diese Frage zu verneinen ist, wenn der Weg C eine endliche Länge hat. Der Weg C könnte beispielsweise auch eine Spirale von unendlicher Länge mit dem asymptotischen Punkt a sein. Die für die Theorie der Differentialgleichungen grundlegende Frage muß beantwortet werden, ohne daß man den Weg C unnötigen Einschränkungen unterwirft.

Wir sagen: „der Weg C nähert sich dem Punkte a“, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: zu jeder noch so kleinen positiven Größe ε gehört ein Punkt x_0 des Weges C von solcher Beschaffenheit, daß für jeden auf x_0 folgenden Punkt x von C der absolute Betrag von $x - a$ kleiner als ε ist. Wenn wir sagen: „eine Funktion von x nähert sich der Grenze b, wenn sich x auf dem Wege C der Grenze a nähert“, so verstehen wir darunter folgendes: zu jeder noch so kleinen positiven Größe η gehört eine andere positive Größe ε von der Art, daß für alle Punkte x des Weges C jenseits des oben eingeführten Punktes x_0 $|y - b| < \eta$ bleibt.

Wir können nun den folgenden Satz aussprechen:

Außer der in § 31 nachgewiesenen regulären Lösung gibt es keine weitere Lösung y, welche sich der Grenze b nähert, wenn sich x auf einem bestimmten Wege C der Grenze a nähert.

Eine Lösung y von (A), welche die angegebene Bedingung erfüllt, wird durch die Substitution (10) in eine Lösung z von (12) übergeführt, welche sich der Grenze b nähert, wenn sich x auf dem Wege C der Grenze a nähert. Die einzige Lösung der Differentialgleichung (12) von der angegebenen Beschaffenheit ist aber $z = b$. Demnach ist die einzige Lösung der Differentialgleichung (A) mit der in dem obigen Satze angegebenen Eigenschaft die frühere reguläre Lösung $y = \varphi(x, a, b)$.

§ 35. Existenz der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen.

In § 11 ist die Methode der schrittweisen Annäherung für eine einzige Differentialgleichung erster Ordnung im reellen Gebiet dargestellt; in § 12 ist gezeigt worden, daß die Übertragung der Methode auf ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen keine Schwierigkeit bietet. Hiernach ist es nicht erforderlich, die Übertragung der Methode auf ein System von Differentialgleichungen im komplexen Gebiet durchzuführen. Es dürfte genügen, das Ergebnis in Form eines Satzes auszusprechen:

In dem Differentialgleichungssystem

$$\text{(C)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

seien $f_1, \ldots, f_n$ analytische Funktionen der Veränderlichen $x, y_1, \ldots, y_n$, welche sich in dem Gebiet

$$|x - a| \leqq h, \ |y_1 - b_1| \leqq H, \ \ldots, \ |y_n - b_n| \leqq H$$

regulär verhalten. In diesem Gebiete sei

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq M \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Das Differentialgleichungssystem (C) besitzt eine Lösung

$$y_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

wo $\varphi_i(x)$ eine analytische Funktion von x ist, welche für $x = a$ den Wert b_i annimmt und sich für $|x - a| \leqq \varrho$ regulär verhält, wenn unter ϱ die kleinere der beiden Größen

$$h, \ \frac{H}{M}$$

verstanden wird.

Außer dieser regulären Lösung gibt es keine weitere Lösung $y_i (i = 1, \ldots, n)$ von solcher Beschaffenheit, daß sich y_i der Grenze b_i nähert, wenn sich x auf einem bestimmten Wege der Grenze a nähert.

In § 12 wurde ein System linearer Differentialgleichungen im reellen Gebiet betrachtet und gezeigt, daß dann $\varrho = h$ gesetzt werden kann. Entsprechendes gilt im komplexen Gebiet. Wir sprechen sofort den folgenden Satz aus:

Das System linearer Differentialgleichungen

$$(D) \qquad \frac{dy_i}{dx} = A_{i1}(x)\,y_1 + \cdots + A_{in}(x)\,y_n + B_i(x) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

habe als Koeffizienten $A_{i1}(x), \ldots, A_{in}(x), B_i(x)$ analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen x, welche sich in dem Kreise $|x - a| < R$ regulär verhalten. Sind die endlichen Größen $b_1, \ldots, b_n$ beliebig vorgeschrieben, so sind n analytische Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ der Veränderlichen x vorhanden, welche das System (D) befriedigen, für $x = a$ die Werte $y_1 = b_1, \ldots, y_n = b_n$ annehmen und sich in dem Kreise $|x - a| < R$ regulär verhalten.

Denn wenn die positive Größe $r < R$ beliebig gewählt wird, so sind die Funktionen $A_{i1}(x), \ldots, A_{in}(x), B_i(x)$ für $|x - a| \leqq r$ regulär; dann sind die Funktionen y_i für $|x - a| \leqq r$ regulär, also auch für $|x - a| < R$, da $r < R$ beliebig nahe bei R angenommen werden kann.[1])

[1]) Existenzbeweise im komplexen Gebiet können auch nach der Majorantenmethode von Cauchy (calcul des limites) geführt werden. Vgl. z. B. Schlesinger, Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage (3. Aufl.), S. 27 f.

Siebentes Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet.

§ 36. Reguläre und singuläre Stellen einer linearen Differentialgleichung.

Wir betrachten jetzt die lineare Differentialgleichung

$$(A) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = 0$$

unter der Voraussetzung, daß $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen x sind. In der Umgebung der Stelle $x = a$ mögen sich diese Funktionen sämtlich regulär verhalten. Wir beschreiben um den Punkt $x = a$ einen Kreis K vom Radius R, auf dessen Peripherie mindestens eine singuläre Stelle einer der Funktionen $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ liegt, während das Innere des Kreises keine solche singuläre Stelle enthält. Die Funktionen $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ lassen sich also in Potenzreihen von $x - a$ entwickeln, welche für $|x - a| < R$ konvergieren.

Wir denken uns die Differentialgleichung (A) wie in § 19 auf ein System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit den n unbekannten Funktionen $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ zurückgeführt (die frühere Funktion $F(x)$ ist jetzt durch Null ersetzt):

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \quad \ldots, \quad \frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)},$$

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = -P_n y - P_{n-1} y' - \cdots - P_1 y^{(n-1)}.$$

Sind die n endlichen Größen $b, b', \ldots, b^{(n-1)}$ beliebig vorgeschrieben, so sind nach § 34 n analytische Funktionen $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ der komplexen Veränderlichen x vorhanden, welche das Differentialgleichungssystem befriedigen, für $x = a$ die Werte $y = b, y' = b', \ldots, y^{(n-1)} = b^{(n-1)}$ annehmen und sich im Innern des Kreises K regulär verhalten. Eine weitere Lösung mit denselben Anfangswerten ist nicht vorhanden.

Demnach besitzt die lineare Differentialgleichung (A) eine und nur eine Lösung $y = \varphi(x)$, welche so beschaffen ist, daß für $x = a$

$$y = b, \quad \frac{dy}{dx} = b', \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = b^{(n-1)}$$

wird; die analytische Funktion $\varphi(x)$ läßt sich in eine Potenzreihe von $x - a$ entwickeln, welche im Innern des Kreises K konvergiert. Es ist übrigens nicht ausgeschlossen, daß der Konvergenzkreis dieser Potenzreihe einen größeren Radius hat als der Kreis K.

In den meisten später zu behandelnden Beispielen sind die Koeffizienten $P_1, \ldots, P_n$ der Differentialgleichung (A) rationale Funktionen von x, welche im Endlichen eine endliche Anzahl singulärer Stellen $a_1, \ldots, a_\varrho$ besitzen, zu welchen noch die Stelle $x = \infty$ hinzuzunehmen ist. Indem wir die Koeffizienten $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ überhaupt als analytische Funktionen voraussetzen, bezeichnen wir die singulären Stellen dieser Funktionen als singuläre Stellen der Differentialgleichung (A), jede Stelle $x = a$, an welcher sich sämtliche Funktionen $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ regulär verhalten, als reguläre Stelle. Sämtliche regulären Stellen bilden den Regularitätsbereich.

Setzt man die oben nachgewiesene, in der Umgebung von $x = a$ reguläre Lösung $\varphi(x)$ der Differentialgleichung (A) auf einem innerhalb des Regularitätsbereichs verlaufenden Wege nach einer anderen regulären Stelle $x = a'$ fort, so genügt auch die Fortsetzung der Differentialgleichung (A); dabei ist angenommen, daß die Koeffizienten $P_1(x), \ldots, P_n(x)$, falls sie mehrdeutige Funktionen sind, auf demselben Wege von $x = a$ nach $x = a'$ fortgesetzt sind. Die fortgesetzte Funktion $\varphi(x)$ ist in eine Potenzreihe von $x - a'$ entwickelbar, welche sicher in dem um $x = a'$ beschriebenen Kreise konvergiert, dessen Peripherie den zunächst bei $x = a'$ gelegenen singulären Punkt enthält. Man hat so als Lösung der linearen Differentialgleichung eine im allgemeinen vieldeutige analytische Funktion von x, deren singuläre Stellen sich nur in denjenigen Stellen befinden können, an welchen sich die Koeffizienten $P_1, \ldots, P_n$ singulär verhalten und welche wir als singuläre Stellen der Differentialgleichung bezeichnet haben. (An einer Stelle, welche hiernach als singuläre Stelle der Differentialgleichung bezeichnet wird, können sich trotzdem einzelne oder sogar sämtliche Integrale regulär verhalten.) Der Charakter der Integralfunktion wird wesentlich durch ihr Verhalten in der Umgebung der singulären Stellen bedingt; mit der Untersuchung dieses Verhaltens werden wir uns im folgenden beschäftigen.

Die Sätze, die im vierten Kapitel unter der Voraussetzung aufgestellt wurden, daß die unabhängige Veränderliche x reell ist, übertragen sich

ohne weiteres auf den Fall einer komplexen Veränderlichen. An Stelle des früher betrachteten Intervalls J der reellen Veränderlichen x, in welchem die Koeffizienten $P_1, \ldots, P_n$ der Differentialgleichung stetig sind, tritt jetzt ein Gebiet der komplexen Veränderlichen x, in welchem sich die Funktionen $P_1, \ldots, P_n$ regulär verhalten. Hervorgehobensei der jetzt gültige Satz, daß die Determinante Δ eines Fundamentalsystems $y_1, \ldots, y_n$ der linearen homogenen Differentialgleichung (A) an keiner regulären Stelle verschwindet (vgl. § 20).

§ 37. Reihenentwicklung der Integrale in der Umgebung einer singulären Stelle der Bestimmtheit.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung des Verhaltens der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Stellen. Wir beginnen mit singulären Stellen besonders einfacher Art, die L. Fuchs[1]) vollständig untersucht und aus einem Grunde, den wir später kennen lernen, als singuläre Stellen der Bestimmtheit bezeichnet hat.

Die in § 21 betrachtete Differentialgleichung

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

hat die singuläre Stelle $x = 0$. Wenn die Wurzeln $r_1, \ldots, r_n$ der Gleichung n^{ten} Grades

$$r(r-1)\cdots(r-n+1) + a_1 r(r-1)\cdots(r-n+2) + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

verschieden sind, hat die Differentialgleichung die n partikulären Integrale

$$y_1 = x^{r_1}, \ldots, y_n = x^{r_n}.$$

Im Falle mehrfacher Wurzeln jener Gleichung n^{ten} Grades treten Integrale mit Logarithmen auf.

Wir betrachten jetzt die allgemeinere Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad x^n \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1} \mathfrak{P}_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + x \mathfrak{P}_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + \mathfrak{P}_n(x) y = 0,$$

wo $\mathfrak{P}_1(x), \ldots, \mathfrak{P}_n(x)$ analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen x sind, welche sich in der Umgebung von $x = 0$ regulär verhalten, also in Potenzreihen von x entwickelbar sind, welche im Innern eines gewissen Kreises mit dem Mittelpunkt $x = 0$ konvergieren.

---

[1]) Vgl. zum siebenten Kapitel die für die Theorie der linearen Differentialgleichungen grundlegenden Abhandlungen von L. Fuchs im 66. und 68. Band von Crelles Journal Werke, Bd. I, S. 159—240).

Wir suchen die Differentialgleichung (B) durch eine Reihe von der Form

$$(1) \qquad y = x^r(g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^{r+\nu}$$

zu befriedigen. Zur Berechnung des Exponenten r und der Koeffizienten $g_0, g_1, g_2, \ldots$ setzen wir diese Reihe in die Differentialgleichung (B) ein und vergleichen die Koeffizienten von x^r, x^{r+1}, x^{r+2}, ...

Die linke Seite der Differentialgleichung (B) bezeichnen wir mit $D(y)$. Wir rechnen zunächst das Ergebnis der Einsetzung der Reihe (1), die wir mit $g(x, r)$ bezeichnen, in den Differentialausdruck $D(y)$ aus. Es ist

$$D(g(x,r)) = D\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^{r+\nu}\Big) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu D(x^{r+\nu}).$$

Man hat

$$D(x^r) = x^r f(x, r),$$

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x,r) = r(r-1)\ldots(r-n+1) + r(r-1)\ldots(r-n+2)\,\mathfrak{P}_1(x) + \cdots \\ \qquad\qquad + r\,\mathfrak{P}_{n-1}(x) + \mathfrak{P}_n(x). \end{cases}$$

Durch Entwicklung nach Potenzen von x erhält man

$$(3) \qquad f(x, r) = f(r) + f_1(r)\,x + f_2(r)\,x^2 + \cdots;$$

dabei ist

$$(4) \qquad \begin{cases} f(r) = r(r-1)\ldots(r-n+1) + r(r-1)\ldots(r-n+2)\,\mathfrak{P}_1(0) + \cdots \\ \qquad\qquad + r\,\mathfrak{P}_{n-1}(0) + \mathfrak{P}_n(0) \end{cases}$$

eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von r. Es ist

$$D(x^{r+\nu}) = x^{r+\nu} f(x, r+\nu) = x^{r+\nu}[f(r+\nu) + x f_1(r+\nu) + x^2 f_2(r+\nu) + \cdots],$$

also

$$D(g(x,r)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^{r+\nu}[f(r+\nu) + x f_1(r+\nu) + x^2 f_2(r+\nu) + \cdots]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{r+\nu}\{g_\nu f(r+\nu) + g_{\nu-1} f_1(r+\nu-1) + \cdots + g_1 f_{\nu-1}(r+1) + g_0 f_\nu(r)\}.$$

Durch Nullsetzen der Koeffizienten von x^r, x^{r+1}, x^{r+2}, ..., $x^{r+\nu}$, ... erhält man die Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{cases} g_0 f(r) = 0, \\ g_1 f(r+1) + g_0 f_1(r) = 0, \\ g_2 f(r+2) + g_1 f_1(r+1) + g_0 f_2(r) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_\nu f(r+\nu) + g_{\nu-1} f_1(r+\nu-1) + \cdots + g_1 f_{\nu-1}(r+1) + g_0 f_\nu(r) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

welche erfüllt sein müssen, wenn $y = g(x, r)$ eine Lösung der Differentialgleichung (B) sein soll.

Wir können annehmen, daß r so gewählt ist, daß g_0 nicht verschwindet; dann genügt r der ersten Gleichung (5) zufolge der Gleichung

$$f(r) = 0, \tag{6}$$

die nach Fuchs die zur singulären Stelle $x = 0$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung heißt. Hat diese Gleichung die Wurzel r, aber keine Wurzel $r + \nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), so sind, nachdem man für g_0 einen von Null verschiedenen Wert willkürlich angenommen hat, $g_1, g_2, \ldots, g_\nu, \ldots$ durch die Gleichungen (5) vollständig bestimmt. Die Differentialgleichung (B) besitzt also eine Lösung von der Form

$$y = x^r \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine Potenzreihe von x ist, die, wie wir in § 39 zeigen werden, in einem Kreise um den Punkt $x = 0$ konvergiert, in welchem sämtliche Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(x), \ldots, \mathfrak{P}_n(x)$ konvergent sind.

Hat die determinierende Fundamentalgleichung $f(r) = 0$ lauter einfache Wurzeln $r_1, \ldots, r_n$, zwischen welchen keine ganzzahlige Differenz besteht, so besitzt die Differentialgleichung (B) ein Fundamentalsystem von n Lösungen von der Form

$$y_i = x^{r_i} \varphi_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

wo $\varphi_i(x)$ eine Potenzreihe von x darstellt, welche für $x = 0$ nicht verschwindet.

Daß diese n Lösungen ein Fundamentalsystem bilden, ergibt sich so. Wir nehmen an, es bestehe eine lineare Gleichung

$$C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $C_1, \ldots, C_n$. Bei einem positiven Umlauf um $x = 0$ geht y_i in $s_i y_i$ über, wo $s_i = e^{2\pi r_i \sqrt{-1}}$ ist, bei einem ν-maligen Umlauf in $s_i^\nu y_i$; es gilt also die Gleichung

$$C_1 s_1^\nu y_1 + \cdots + C_n s_n^\nu y_n = 0.$$

Die Größen $s_1, \ldots, s_n$ sind verschieden, da zwischen $r_1, \ldots, r_n$ keine ganzzahlige Differenz besteht; die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & , \ldots, & 1 \\ s_1 & , \ldots, & s_n \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ s_1^{n-1} & , \ldots, & s_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

welche gleich dem Produkt der Differenzen je zweier der Größen $s_1, \ldots, s_n$ ist, ist also von Null verschieden. Daher können die Gleichungen

$$\begin{aligned} C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n &= 0, \\ s_1 C_1 y_1 + \cdots + s_n C_n y_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ s_1^{n-1} C_1 y_1 + \cdots + s_n^{n-1} C_n y_n &= 0 \end{aligned}$$

nur bestehen, wenn $C_1 = 0, \ldots, C_n = 0$ ist.

§ 38. Mehrfache Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung und Wurzeln mit ganzzahligen Differenzen.

Um auch den Fall zu behandeln, daß die Gleichung $f(r) = 0$ mehrfache Wurzeln oder Wurzeln mit ganzzahligen Differenzen besitzt, wenden wir ein Verfahren von Frobenius[1]) an. Indem wir die erste Gleichung (5) vorläufig außer Betracht lassen, lassen wir r unbestimmt, wählen für g_0 eine beliebige Funktion von r und berechnen $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ als Funktionen von r aus der 2., 3., ..., $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Gleichung (5); wir erhalten

$$g_\nu = \frac{g_0 \mathfrak{g}_\nu(r)}{f(r+1) \ldots f(r+\nu)}, \tag{8}$$

wo $\mathfrak{g}_\nu(r)$ eine ganze rationale Funktion von r darstellt.

Die so bestimmte Reihe (1) genügt zwar nicht der Differentialgleichung (B), wohl aber der Differentialgleichung

$$D(y) = g_0(r) f(r) x^r. \tag{9}$$

Wir verstehen unter $\mathfrak{n}$ eine ganze positive Zahl, welche mindestens gleich der größten ganzzahligen Differenz ist, die zwischen den Wurzeln $r_1, \ldots, r_n$ der determinierenden Fundamentalgleichung besteht. Wir grenzen in der Ebene der komplexen Veränderlichen r ein Gebiet $\mathfrak{R}$ ab, welches aus kleinen Umgebungen der Stellen $r_1, \ldots, r_n$ besteht. Wenn wir jetzt

$$g_0(r) = f(r+1) \ldots f(r+\mathfrak{n}) \cdot \mathfrak{g}(r) \tag{9'}$$

setzen, wo $\mathfrak{g}(r)$ für keinen der Werte $r_1, \ldots, r_n$ verschwindet, so sind sämtliche $g_\nu(r)$ im Gebiet $\mathfrak{R}$ endlich.

Wir weisen in § 39 nach, daß die so berechneten Reihen gleichmäßig konvergent sind, wenn $|x|$ hinreichend klein ist und r dem Gebiete $\mathfrak{R}$ angehört.

I. Wir nehmen jetzt an, die Gleichung $f(r) = 0$ besitze eine μ-fache Wurzel r_0, welche von keiner anderen Wurzel um eine ganze positive

[1]) Crelles Journal, Bd. 76.

Zahl übertroffen wird. Dann wird für $r = r_0$ keine der Größen $g_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ unendlich groß, da keiner der im Nenner enthaltenen Faktoren $f(r+1)$, $f(r+2), \ldots$ für $r = r_0$ verschwindet. Die so bestimmte Funktion $y = g(x, r)$ mit der Unbestimmten r genügt der Differentialgleichung (9), deren rechte Seite den Faktor $(r - r_0)^\mu$ enthält, also für $r = r_0$ nebst ihrer 1., 2., ..., $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Ableitung nach r verschwindet. Es ist, da die Differentiationen nach x und r vertauschbar sind,

$$\frac{\partial^\lambda D(y)}{\partial r^\lambda} = D\left(\frac{\partial^\lambda y}{\partial r^\lambda}\right) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Demnach hat die Differentialgleichung (B) die Lösungen

$$(10)\quad \begin{cases} y_1 = g(x, r_0), \quad y_2 = \left(\dfrac{\partial g(x,r)}{\partial r}\right)_{r=r_0}, \quad y_3 = \left(\dfrac{\partial^2 g(x,r)}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}, \ldots, \\ y_\mu = \left(\dfrac{\partial^{\mu-1} g(x,r)}{\partial r^{\mu-1}}\right)_{r=r_0} \end{cases}$$

oder

$$(11)\quad \begin{cases} y_1 = x^{r_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_0)\, x^\nu, \\ y_2 = x^{r_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} g'_\nu(r_0)\, x^\nu + x^{r_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_0)\, x^\nu \cdot \log x, \\ y_3 = x^{r_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} g''_\nu(r_0)\, x^\nu + 2\, x^{r_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} g'_\nu(r_0)\, x^\nu \cdot \log x \\ \qquad\qquad + x^{r_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_0) x^\nu \cdot (\log x)^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Da $g_0(r_0) \neq 0$ ist, so kommen notwendig Glieder mit $\log x$, $(\log x)^2$, ... vor.

Unter Anwendung der Bezeichnung

$$\varphi_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_0) x^\nu,$$
$$\varphi_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g'_\nu(r_0)\, x^\nu,$$
$$\varphi_3(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g''_\nu(r_0)\, x^\nu,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

schreiben wir die nachgewiesenen Lösungen:

$$(12)\quad \begin{cases} y_1 = x^{r_0} \varphi_1(x), \\ y_2 = x^{r_0} [\varphi_2(x) + \varphi_1(x) \log x], \\ y_3 = x^{r_0} [\varphi_3(x) + 2\varphi_2(x) \log x + \varphi_1(x) (\log x)^2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Wir haben oben die unendliche Reihe $g(x, r)$ wiederholt nach r differentiiert, indem wir gliedweise differentiierten. Dies ist zulässig, weil die Reihe $g(x, r)$, wie unten gezeigt wird, in der Umgebung von $r = r_0$ gleichmäßig konvergiert.

Die Lösungen (12) sind linear unabhängig; denn bestände eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten, die wir z. B. für $\mu = 3$ anschreiben:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = 0,$$

so würde dieselbe durch Nullsetzen der Koeffizienten von $(\log x)^2$, $(\log x)^1$, $(\log x)^0$ zerfallen in

$$\begin{aligned} C_3 \varphi_1(x) &= 0, \\ C_2 \varphi_1(x) + 2 C_3 \varphi_2(x) &= 0, \\ C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + C_3 \varphi_3(x) &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man hierin $x = 0$ und beachtet man, daß $\varphi_1(0) = g_0(r_0) \neq 0$ ist, so ergibt sich $C_3 = 0$, $C_2 = 0$, $C_1 = 0$.

Dabei ist von dem Satz Gebrauch gemacht, daß eine Gleichung

$$\Phi_0(x) + \Phi_1(x) \log x + \Phi_2(x) (\log x)^2 = 0,$$

wo Φ_0, Φ_1, Φ_2 in der Umgebung von $x = 0$ eindeutig sind, nur bestehen kann, wenn Φ_0, Φ_1, Φ_2 identisch verschwinden. Die vorausgesetzte Gleichung geht nämlich bei einem ν-fachen Umlauf um $x = 0$, welcher $\log x$ in $\log x + 2\nu\pi i$ überführt, in

$$\Phi_0 + \Phi_1(\log x + 2\nu\pi i) + \Phi_2(\log x + 2\nu\pi i)^2 = 0$$

oder

$$\Phi_0 + \Phi_1 \log x + \Phi_2 (\log x)^2 + [\Phi_1 + 2\Phi_2 \log x] \cdot 2\nu\pi i + \Phi_2 (2\nu\pi i)^2 = 0$$

über. Da ν eine beliebige ganze Zahl sein kann, muß

$$\Phi_2 = 0, \quad \Phi_1 + 2\Phi_2 \log x = 0, \quad \Phi_0 + \Phi_1 \log x + \Phi_2 (\log x)^2 = 0$$

sein, d. h. die Funktionen Φ_2, Φ_1, Φ_0 müssen identisch verschwinden.

II. Es seien jetzt $r_1, r_2, r_3, \ldots$ einfache Wurzeln der Gleichung $f(r) = 0$, und die Differenzen $r_1 - r_2$, $r_2 - r_3$, $\ldots$ seien ganze positive Zahlen; es sei aber keine weitere Wurzel vorhanden, welche sich von den angegebenen um ganze Zahlen unterscheidet.

Dann enthält $f(r)$ die einfachen Faktoren $r - r_1$, $r - r_2$, $r - r_3$, $\ldots$, $f(r + r_1 - r_2)$ den Faktor $(r + r_1 - r_2) - r_1 = r - r_2$, $f(r + r_1 - r_3)$ den Faktor $(r + r_1 - r_3) - r_1 = r - r_3$, $f(r + r_2 - r_3)$ den Faktor $(r + r_2 - r_3) - r_2 = r - r_3$ usw.# Das Produkt

$$f(r)\, f(r+1) \ldots f(r+n)$$

ist demnach durch $(r - r_1)(r - r_2)^2 (r - r_3)^3 \ldots$ teilbar. Dasselbe gilt für die rechte Seite der Differentialgleichung

$$D(y) = f(r)\, f(r+1) \ldots f(r+n)\, g(r)\, x^r,$$

We know $f(r_1) = f(r_2) = \ldots = 0$.
$\therefore f(r + r_1 - r_2)$ for $r = r_2$ reduces to $f(r_1) = 0$. $\therefore r - r_2$ a factor of $f(r + r_1 - r_2)$ etc.

in welche (9) durch Einsetzung des obigen Wertes für $g_0(r)$ übergeht. Diese rechte Seite verschwindet für $r = r_1$, sie verschwindet nebst der ersten Ableitung nach r für $r = r_2$, nebst den beiden ersten Ableitungen für $r = r_3$ usw. Die Differentialgeichung (B) hat demnach die Lösungen

$$\begin{aligned} &g(x, r_1), \\ &g(x, r_2), \quad \left(\frac{\partial g(x,r)}{\partial r}\right)_{r=r_2}, \\ &g(x, r_3), \quad \left(\frac{\partial g(x,r)}{\partial r}\right)_{r=r_3}, \quad \left(\frac{\partial^2 g(x,r)}{\partial r^2}\right)_{r=r_3} \end{aligned}$$

usw., die aber nicht sämtlich linear unabhängig sind, so daß wir nur die folgenden beizubehalten brauchen:

$$(13) \qquad \begin{cases} y_1 = g(x, r_1), \\ y_2 = \left(\frac{\partial g(x,r)}{\partial r}\right)_{r=r_2}, \\ y_3 = \left(\frac{\partial^2 g(x,r)}{\partial r^2}\right)_{r=r_3}, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

oder

$$(14) \qquad \begin{cases} y_1 = x^{r_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_1) x^\nu, \\ y_2 = x^{r_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} g'_\nu(r_2)\, x^\nu + x^{r_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_2)\, x^\nu \cdot \log x, \\ y_3 = x^{r_3} \sum_{\nu=0}^{\infty} g''_\nu(r_3)\, x^\nu + 2 x^{r_3} \sum_{\nu=0}^{\infty} g'_\nu(r_3)\, x^\nu \cdot \log x \\ \qquad\qquad + x^{r_3} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_3)\, x^\nu \cdot (\log x)^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Da das Produkt $f(r+1) \ldots f(r+n)$, also auch $g_0(r)$ den Faktor $r - r_1$ überhaupt nicht, den Faktor $r - r_2$ nur in der ersten, den Faktor $r - r_3$ nur in der zweiten Potenz enthält, sind $g_0(r_1)$, $g'_0(r_2)$, $g''_0(r_3)$, ... von Null verschieden.

Wir schreiben diese Lösungen in der Form:

$$(15) \qquad \begin{cases} y_1 = x^{r_1} \varphi_1(x), \\ y_2 = x^{r_2} \varphi_2(x) + x^{r_1} \varphi_{21}(x) \log x, \\ y_3 = x^{r_3} \varphi_3(x) + x^{r_3} \varphi_{31}(x) \log x + x^{r_3} \varphi_{32}(x) (\log x)^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

wo die φ konvergente Potenzreihen von x und $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\varphi_3(0)$, ... von Null verschieden sind.

Die Formeln (15) ergeben sich folgendermaßen. Nach (8) ist, da $g_0(r)$ den Faktor $(r-r_2)(r-r_3)^2\ldots$ enthält,

$$g_\nu(r) = \frac{(r-r_2)(r-r_3)^2\ldots \mathfrak{h}_\nu(r)}{f(r+1)\ldots f(r+\nu)},$$

wo $\mathfrak{h}_\nu(r)$ für $r = r_1, r_2, r_3, \ldots$ endlich ist. Die Größen

$$g_\nu(r) \qquad (\nu = 0,1, \ldots, r_1 - r_2 - 1)$$

enthalten den Faktor $r - r_2$, weil dieser in $f(r+1), \ldots, f(r+r_1-r_2-1)$ nicht vorkommt; die Größen

$$g_\nu(r) \qquad (\nu = 0,1, \ldots, r_2 - r_3 - 1)$$

sind durch $(r-r_3)^2$ teilbar, da $f(r+1), \ldots, f(r+r_2-r_3-1)$ den Faktor $r-r_3$ nicht enthalten; die Größen

$$g_\nu(r) \qquad (\nu = r_2 - r_3, \ldots, r_1 - r_3 - 1)$$

sind nur durch $r-r_3$ teilbar, weil sie im Nenner die durch $r-r_3$ teilbare Größe $f(r+r_2-r_3)$ enthalten. Usw. Der Ausdruck

$$g(x, r_2) = x^{r_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_2)\, x^\nu,$$

welcher sich oben als Lösung ergeben hatte und welcher zugleich den Koeffizienten von $\log x$ in y_2 darstellt, beginnt, da

$$g_\nu(r_2) \qquad (\nu = 0,1, \ldots, r_1 - r_2 - 1)$$

verschwindet, mit dem Gliede

$$x^{r_2} \cdot g_{r_1-r_2}(r_2)\, x^{r_1-r_2} = x^{r_1} g_{r_1-r_2}(r_2);$$

er unterscheidet sich, falls er nicht identisch verschwindet, von y_1 nur durch einen konstanten Faktor. Dasselbe gilt für $g(x, r_3)$, den Koeffizienten von $(\log x)^2$ in y_3. Der Faktor von $\log x$ in dem Ausdruck für y_3 beginnt, da

$$g'_\nu(r_3) = 0 \text{ für } \nu = 0,1, \ldots, r_2 - r_3 - 1$$

ist, mit dem (nicht notwendig von Null verschiedenen) Glied

$$2\, x^{r_3} \cdot g'_{r_2-r_3}(r_3)\, x^{r_2-r_3} = 2\, x^{r_2} g'_{r_2-r_3}(r_3).$$

Daß die Lösungen (15) linear unabhängig sind, ergibt sich beispielsweise für den Fall dreier Wurzeln r_1, r_2, r_3 folgendermaßen. Aus einer linearen Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = 0$$

folgt durch Einsetzung der Ausdrücke (15) und Vergleichung der von Logarithmen freien Glieder

$$C_1 x^{r_1} \varphi_1(x) + C_2 x^{r_2} \varphi_2(x) + C_3 x^{r_3} \varphi_3(x) = 0.$$

Durch Division mit x^{r_3} und Nullsetzen von x erhält man $C_3 \varphi_3(0) = 0$; wegen $\varphi_3(0) \neq 0$ ist $C_3 = 0$. Dividiert man jetzt durch x^{r_2}, so hat man für $x = 0$ $C_2 \varphi_2(0) = 0$; es ist aber $\varphi_2(0) \neq 0$ und daher $C_2 = 0$. Schließlich erhält man, wenn man nach Division mit x^{r_1} $x = 0$ setzt, $C_1 \varphi_1(0) = 0$; da $\varphi_1(0) \neq 0$ ist, muß $C_1 = 0$ sein.

Wir sprechen die Sätze aus:

Einer μ-fachen Wurzel r_0 der Gleichung $f(r) = 0$ entsprechen, wenn keine Wurzel $r_0 + \lambda$ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) vorhanden ist, μ Integrale von der Form (12), wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ Potenzreihen von x sind und $\varphi_1(0) \neq 0$ ist.

Den einfachen Wurzeln $r_1, r_2, r_3, \ldots$ der Gleichung $f(r) = 0$ entsprechen, wenn die Differenzen $r_1 - r_2$, $r_2 - r_3$, $\ldots$ ganze positive Zahlen sind, wenn sich aber keine weitere Wurzel von den angegebenen um ganze Zahlen unterscheidet, Integrale von der Form (15), wo die φ Potenzreihen von x und $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\varphi_3(0)$, $\ldots$ von Null verschieden sind[1]).

Für den allgemeinen Fall, daß die Gleichung $f(r) = 0$ die μ_1-fache Wurzel r_1, die μ_2-fache Wurzel r_2 usw. hat und daß die Differenzen $r_1 - r_2$ usw. ganze positive Zahlen sind, während keine weitere Wurzel sich von $r_1, r_2, \ldots$ um ganze Zahlen unterscheidet, wollen wir die Methode von Frobenius nicht durchführen; wir geben nur an, daß die folgenden linear unabhängigen Integrale vorhanden sind:

$$\left(\frac{\partial^\mu g(x, r)}{\partial r^\mu}\right)_{r=r_1} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, \mu_1 - 1),$$

$$\left(\frac{\partial^\mu g(x, r)}{\partial r^\mu}\right)_{r=r_2} \qquad (\mu = \mu_1, \mu_1 + 1, \ldots, \mu_1 + \mu_2 - 1)$$

usw.

Einer Gruppe von p Wurzeln, deren Differenzen ganze Zahlen einschließlich Null sind, entsprechen so p linear unabhängige Integrale. Ähnlich wie bisher beweist man auch, daß die Integrale, welche verschiedenen Wurzelgruppen entsprechen, linear unabhängig sind, so daß sich ein Fundamentalsystem von n Integralen ergibt.

---

[1]) Die Potenzreihen $\varphi_{21}, \varphi_{31}, \varphi_{32}, \ldots$ können identisch verschwinden, also die Logarithmen fortfallen.

§ 39. Konvergenzbeweis.

Wir haben noch die Konvergenz der in § 37 und § 38 aufgestellten Reihen nachzuweisen.

Wir können in der Differentialgleichung (B) vermittels der in § 25 angegebenen Substitution das Glied mit $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ beseitigen. Wir dürfen demnach $\mathfrak{P}_1(x) \equiv 0$ voraussetzen. Wenn wir

$$\mathfrak{P}_\alpha(x) = a_\alpha + a_\alpha^{(1)} x + a_\alpha^{(2)} x^2 + \cdots \qquad (\alpha = 2, \ldots, n)$$

setzen, ist

$$f(r) = r(r-1)\ldots(r-n+1) + a_2 r(r-1)\ldots(r-n+3) + \cdots + a_{n-1} r + a_n,$$

$$f_\lambda(r) = a_2^{(\lambda)} r(r-1)\ldots(r-n+3) + \cdots + a_{n-1}^{(\lambda)} r + a_n^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Wenn die Potenzreihe $\mathfrak{P}_\alpha(x)$ für $|x| = \varrho$ absolut konvergiert, ist für $|x| = \varrho$ die Summe der absoluten Beträge der Reihenglieder $a_\alpha^{(\lambda)} x^\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ und daher auch der absolute Betrag eines jeden einzelnen Reihengliedes $a_\alpha^{(\lambda)} x^\lambda$ kleiner als eine endliche positive Größe M, also

$$|a_\alpha^{(\lambda)}| < \frac{M}{\varrho^\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Bei geeigneter Wahl von M gilt diese Ungleichung für $\alpha = 2, \ldots, n$. Wenn r dem in § 38 eingeführten Gebiet $\mathfrak{R}$ angehört, welches aus kleinen Umgebungen der Stellen $r_1, \ldots, r_n$ besteht, möge $|r| < \mathfrak{r}$ sein. Es ist also

$$|f_\lambda(r)| \leqq |a_2^{(\lambda)}| \cdot |r|\,(|r|+1)\ldots(|r|+n-3) + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)}| \cdot |r| + |a_n^{(\lambda)}|$$

$$\leqq \frac{M}{\varrho^\lambda}\,\mathfrak{r}(\mathfrak{r}+1)\ldots(\mathfrak{r}+n-3) + \cdots + \frac{M}{\varrho^\lambda}\,\mathfrak{r} + \frac{M}{\varrho^\lambda}$$

oder, wenn die ganze Funktion $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades von $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{r}+1)\ldots(\mathfrak{r}+n-3) + \cdots + \mathfrak{r} + 1$$

eingeführt wird,

$$|f_\lambda(r)| \leqq \frac{M}{\varrho^\lambda}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{r}) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Wenn ν die in § 38 eingeführte Zahl $\mathfrak{n}$ übertrifft, verschwindet $f(r+\nu)$ für keinen dem Gebiet $\mathfrak{R}$ angehörenden Wert von r. Da $f(r+\nu)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades von ν und der Koeffizient von ν^n gleich 1 ist, hat man

$$\lim_{\nu \succ \infty} \frac{\nu^n}{f(r+\nu)} = 1.$$

Für $\nu > \mathfrak{n}$ ist

$$\left|\frac{\nu^n}{f(r+\nu)}\right| < \Gamma,$$

wo Γ eine endliche positive Größe bedeutet, oder

$$\left|\frac{1}{f(r+\nu)}\right| < \frac{\Gamma}{\nu^n}.$$

Wir wollen zeigen, daß eine von r unabhängige endliche positive Größe G so vorhanden ist, daß für alle r-Werte des Gebietes $\mathfrak{R}$

$$|g_\mu| \leqq \frac{G}{\varrho^\mu} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

ist. Wir verstehen unter $\mathfrak{N}$ eine ganze positive Zahl, welche mindestens gleich $\mathfrak{n}$ ist und später noch gewählt wird. Zunächst können wir G so groß annehmen, daß die Bedingung (16) für $\mu = 0, 1, \ldots, \mathfrak{N}$ erfüllt ist. Wir setzen nun voraus, sie sei für $\mu = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ erfüllt, wo $\nu > \mathfrak{N}$ ist. Nach (5) ist

$$g_\nu = -\frac{f_1(r+\nu-1)}{f(r+\nu)} g_{\nu-1} - \cdots - \frac{f_{\nu-1}(r+1)}{f(r+\nu)} g_1 - \frac{f_\nu(r)}{f(r+\nu)} g_0,$$

also

$$|g_\nu| \leqq \frac{\Gamma}{\nu^n}\left\{\frac{M}{\varrho} f(r+\nu-1)\cdot\frac{G}{\varrho^{\nu-1}} + \cdots + \frac{M}{\varrho^{\nu-1}} \mathfrak{f}(r+1)\cdot\frac{G}{\varrho} + \frac{M}{\varrho^\nu}\mathfrak{f}(r)\cdot G\right\}$$
$$= \frac{\Gamma M G}{\nu^n \varrho^\nu}\{\mathfrak{f}(r) + \mathfrak{f}(r+1) + \cdots + \mathfrak{f}(r+\nu-1)\}.$$

Nun ist $\mathfrak{f}(r+\nu-1)$ eine ganze Funktion $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades von ν; für $\nu = 1, 2, \ldots$ ist

$$\mathfrak{f}(r+\nu-1) < \mathfrak{A}\nu^{n-2},$$

wo $\mathfrak{A}$ eine endliche positive Größe darstellt, also

$$\mathfrak{f}(r) + \mathfrak{f}(r+1) + \cdots + \mathfrak{f}(r+\nu-1) < \nu\mathfrak{f}(r+\nu-1) < \mathfrak{A}\nu^{n-1}.$$

Demnach ist

$$|g_\nu| \leqq \frac{\Gamma M G}{\nu^n \varrho^\nu}\cdot\mathfrak{A}\nu^{n-1} = \frac{\Gamma M \mathfrak{A}}{\nu}\cdot\frac{G}{\varrho^\nu}.$$

Wenn die noch unbestimmt gelassene Zahl $\mathfrak{N} > \mathfrak{n}$ der Bedingung $\mathfrak{N} \geqq \Gamma M \mathfrak{A}$ unterworfen wird, ist, da $\nu > \mathfrak{N}$ sein soll, $\frac{\Gamma M \mathfrak{A}}{\nu} < 1$, also

$$|g_\nu| \leqq \frac{G}{\varrho^\nu},$$

d. h. die Bedingung (16), die für $\mu = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ erfüllt sein sollte, ist auch für $\mu = \nu$ erfüllt.

Es ist demnach für $|x| \leqq \varrho$ und für alle Werte r des Gebietes $\mathfrak{R}$

$$|g_\nu x^\nu| \leqq G\left(\frac{|x|}{\varrho}\right)^\nu.$$

Da die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} G\left(\frac{|x|}{\varrho}\right)^\nu,$$

wenn die positive Größe $\varrho' < \varrho$ beliebig gewählt wird, für $|x| \leqq \varrho'$ gleichmäßig konvergiert, so ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^\nu$$

für $|x| \leqq \varrho'$ und für alle Werte r in $\mathfrak{R}$ absolut und gleichmäßig konvergent, w. z. b. w.

Hierbei ist ϱ und damit auch ϱ' beliebig wenig kleiner als der kleinste der Konvergenzradien der Potenzreihen $\mathfrak{P}_2(x), \ldots, \mathfrak{P}_n(x)$.

§ 40. Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typus.

Wir haben bisher die lineare Differentialgleichung mit der singulären Stelle der Bestimmtheit $x = 0$ untersucht. Ist $x = a$ die singuläre Stelle, so hat man nur in allen bisherigen Entwicklungen x durch $x - a$ zu ersetzen.

Um die singuläre Stelle der Bestimmtheit $x = \infty$ zu untersuchen, führen wir

$$\xi = \frac{1}{x}$$

als unabhängige Veränderliche ein, so daß eine Differentialgleichung mit der singulären Stelle der Bestimmtheit $\xi = 0$ entsteht, also eine Differentialgleichung von der Form

$$\xi^n \frac{d^n y}{d\xi^n} + \xi^{n-1}\mathfrak{P}_1(\xi)\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}} + \cdots + \xi\,\mathfrak{P}_{n-1}(\xi)\frac{dy}{d\xi} + \mathfrak{P}_n(\xi)\,y = 0,$$

wo $\mathfrak{P}_1(\xi), \ldots, \mathfrak{P}_n(\xi)$ Potenzreihen von ξ sind. Diese Differentialgleichung geht, da

$$\xi\frac{dy}{d\xi} = -x\frac{dy}{dx},$$

$$\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2} = x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx},$$

$$\xi^3\frac{d^3y}{d\xi^3} = -x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 6x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6x\frac{dy}{dx}$$

usw. ist, über in

$$y\,\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) + x\,\frac{dy}{dx}\left[-\mathfrak{P}_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + 2\,\mathfrak{P}_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right) - \cdots\right]$$
$$+ x^2\,\frac{d^2y}{dx^2}\left[\mathfrak{P}_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots\right] + \cdots \pm x^n\,\frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

oder

$$(17)\quad x^n\,\frac{d^ny}{dx^n} + x^{n-1}\,\overline{\mathfrak{P}}_1\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + x\,\overline{\mathfrak{P}}_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx} + \overline{\mathfrak{P}}_n\left(\frac{1}{x}\right)y = 0,$$

wo $\overline{\mathfrak{P}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{P}}_n$ in Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ entwickelbar sind.

Die zur singulären Stelle $x = \infty$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (17) lautet

$$(18)\quad r(r+1)\ldots(r+n-1) - r(r+1)\ldots(r+n-2)\,\overline{\mathfrak{P}}_1(0)$$
$$+ \cdots + (-1)^{n-1}\,r\,\overline{\mathfrak{P}}_{n-1}(0) + (-1)^n\,\overline{\mathfrak{P}}_n(0) = 0;$$

sie ergibt sich ohne Transformation der unabhängigen Veränderlichen durch Einsetzen von $y = g_0\left(\frac{1}{x}\right)^r + \cdots$ in die Differentialgleichung (17) und Nullsetzen des Koeffizienten von $g_0 x^{-r}$.

Die Koeffizienten der linearen Differentialgleichung (A)

$$\frac{d^ny}{dx^n} + P_1(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\,\frac{dy}{dx} + P_n(x)\,y = 0$$

seien eindeutige Funktionen von x, welche im Endlichen ϱ singuläre Stellen $a_1, \ldots, a_\varrho$ besitzen. Außer diesen singulären Stellen hat die Differentialgleichung im allgemeinen noch die singuläre Stelle $x = \infty$.

Wenn die sämtlichen $\varrho + 1$ singulären Stellen $a_1, \ldots, a_\varrho, \infty$ Stellen der Bestimmtheit sind, so sagt man, die Differentialgleichung sei vom Fuchsschen Typus. Wir suchen die allgemeine Form der Koeffizienten einer Differentialgleichung des Fuchsschen Typus auf.

In der Umgebung der Stelle $x = a_i (i = 1, \ldots, \varrho)$ ist

$$P_1 = \frac{\mathfrak{P}_{i1}(x - a_i)}{x - a_i}, \qquad P_2 = \frac{\mathfrak{P}_{i2}(x - a_i)}{(x - a_i)^2}, \qquad \ldots, \qquad P_n = \frac{\mathfrak{P}_{in}(x - a_i)}{(x - a_i)^n},$$

wo sich $\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{P}_{i2}, \ldots, \mathfrak{P}_{in}$ in der Umgebung von $x = a_i$ regulär verhalten. Setzt man

$$(19)\qquad \psi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_\varrho),$$

so ist

$$(20) \qquad P_1 = \frac{F_1(x)}{\psi}, \qquad P_2 = \frac{F_2(x)}{\psi^2}, \qquad \ldots, \qquad P_n = \frac{F_n(x)}{\psi^n};$$

$F_1, F_2, \ldots, F_n$ sind Funktionen von x, welche sich im Endlichen überall regulär verhalten, also ganze (rationale oder transzendente) Funktionen von x. Soll $x = \infty$ Stelle der Bestimmtheit sein, so muß

$$(21) \qquad P_1 = \frac{1}{x}\overline{\mathfrak{P}}_1\left(\frac{1}{x}\right), \qquad P_2 = \frac{1}{x^2}\overline{\mathfrak{P}}_2\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \ldots, \qquad P_n = \frac{1}{x^n}\overline{\mathfrak{P}}_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

sein, wo $\overline{\mathfrak{P}}_1, \overline{\mathfrak{P}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{P}}_n$ in der Umgebung von $x = \infty$ regulär sind. Demnach ist in der Umgebung von $x = \infty$

$$P_h = \frac{F_h}{\psi^h} = \frac{1}{x^h}\overline{\mathfrak{P}}_h\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

also

$$F_h = \frac{\psi^h}{x^h}\overline{\mathfrak{P}}_h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{[(x-a_1)\ldots(x-a_\varrho)]^h}{x^h}\overline{\mathfrak{P}}_h\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x^{h\varrho}\left[\left(1-\frac{a_1}{x}\right)\ldots\left(1-\frac{a_\varrho}{x}\right)\right]^h}{x^h}\overline{\mathfrak{P}}_h\left(\frac{1}{x}\right) = x^{h(\varrho-1)}\mathfrak{Q}_h\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $\mathfrak{Q}_h$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt. Daher ist $F_h(x)$ eine ganze rationale Funktion von x, deren Grad nicht größer als $h(\varrho-1)$ ist.

Wir haben also den Satz:

Damit eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit den singulären Stellen $a_1, \ldots, a_\varrho$ und ∞ vom Fuchsschen Typus ist, ist notwendig und hinreichend, daß sie die Form

$$(22) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{F_1(x)}{\psi}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \frac{F_{n-1}(x)}{\psi^{n-1}}\frac{dy}{dx} + \frac{F_n(x)}{\psi^n}y = 0$$

besitzt, worin

$$\psi = (x-a_1)\ldots(x-a_\varrho)$$

und F_h eine ganze rationale Funktion von x ist, deren Grad die Zahl $h(\varrho-1)$ nicht übersteigt.

§ 41. Die Gaußsche Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung vom Fuchsschen Typus, welche in der Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen eine wichtige Rolle gespielt hat, ist die Gaußsche Differentialgleichung[1])

$$(23) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

[1]) Diese Differentialgleichung ist im 7. Kapitel der „Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen“ von Schlesinger eingehend behandelt. Wir ver-

Sie hat die singulären Stellen der Bestimmtheit $0, 1, \infty$; die zugehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen haben die Wurzeln $0, 1-\gamma$; $0, \gamma-\alpha-\beta$; α, β. Wir nehmen an, daß $\gamma, \gamma-\alpha-\beta, \alpha-\beta$ keine ganzen Zahlen sind. Die Integrale lassen sich vermittels der hypergeometrischen Reihe

$$(24)\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

darstellen, welche für $|x|<1$ konvergiert. In der Umgebung der singulären Stellen $0, 1, \infty$ haben wir bzw. die Fundamentalsysteme

$$(25)\quad \begin{cases} y_1 = F(\alpha,\beta,\gamma,x), \\ y_2 = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x); \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} y_1^{(1)} = F(\alpha,\beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-x), \\ y_2^{(1)} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x); \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} y_1^{(\infty)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} F\left(\alpha,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\alpha-\beta,\ \frac{1}{x}\right), \\ y_2^{(\infty)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta} F\left(\beta,\ 1+\beta-\gamma,\ 1+\beta-\alpha,\ \frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Wir leiten zunächst die Lösung y_1 aus der Differentialgleichung her, der wir die Form geben:

$$D(y)=x^2(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+x(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta xy=0.$$

Jetzt ist

$$\begin{aligned} D(x^r) &= f(x,r), \\ f(x,r) &= (1-x)r(r-1)+r(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)-\alpha\beta x \\ &= r(r-1)+\gamma r+x(-r(r-1)-(\alpha+\beta+1)r-\alpha\beta), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f(r) &= r(r-1)+\gamma r = r(r-1+\gamma), \\ f_1(r) &= -r(r-1)-(\alpha+\beta+1)r-\alpha\beta = -r^2-(\alpha+\beta)r-\alpha\beta \\ &= -(r+\alpha)(r+\beta), \\ f_2(r) &= 0,\ f_3(r)=0,\ldots \end{aligned}$$

Für die Wurzel $r=0$ der determinierenden Fundamentalgleichung $r(r-1+\gamma)=0$ wird die Rekursionsformel (5)

$$\frac{g_\nu}{g_{\nu-1}}=-\frac{f_1(\nu-1)}{f(\nu)}=\frac{(\alpha+\nu-1)(\beta+\nu-1)}{\nu(\gamma+\nu-1)};$$

---

weisen auf diese Darstellung, wo sich auch Literaturangaben finden. Besonders hervorgehoben seien die Arbeiten von Gauß (Werke, Bd. III, S. 123 f., S. 207 f.) und Riemann (Werke, 2. Aufl., S. 67 f.; Nachträge, S. 69 f.).

demnach ist, wenn $g_0 = 1$ gesetzt wird,

$$g_\nu = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)\cdot\beta(\beta+1)\dots(\beta+\nu-1)}{1\cdot 2\dots\nu\cdot\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1)}.$$

Damit ist die Lösung

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

der Differentialgleichung (23) nachgewiesen.

Die übrigen oben angegebenen Lösungen erhält man folgendermaßen: Durch die Substitution

$$y = x^{1-\gamma}\eta$$

erhält man die Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{d^2\eta}{dx^2} + (2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)x)\frac{d\eta}{dx} - (\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)\eta = 0,$$

welche aus (23) dadurch hervorgeht, daß man α, β, γ durch $\alpha-\gamma+1$, $\beta-\gamma+1$, $2-\gamma$ ersetzt, und demnach die Lösung

$$\eta = F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x)$$

besitzt. Daraus folgt die Lösung y_2 der Differentialgleichung (23).

Durch die Substitution

$$\xi = 1 - x$$

geht die Differentialgleichung (23) in die Differentialgleichung

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2} + (\alpha+\beta-\gamma+1-(\alpha+\beta+1)\xi)\frac{dy}{d\xi} - \alpha\beta y = 0$$

über, welche aus (23) entsteht, indem man α, β, γ durch $\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1$ ersetzt, und demnach die Lösungen

$$\eta_1 = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, \xi)$$
$$\eta_2 = \xi^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ \xi)$$

besitzt, aus welchen die Lösungen $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}$ der Differentialgleichung (23) hervorgehen.

Setzt man schließlich

$$\xi = \frac{1}{x},\quad \eta = \xi^\alpha y,$$

so entsteht die Differentialgleichung

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (\alpha-\beta+1-(2\alpha-\gamma+2)\xi)\frac{d\eta}{d\xi} - \alpha(\alpha-\gamma+1)\eta = 0,$$

die aus (23) durch Ersetzung von α, β, γ durch $\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1$ hervorgeht; aus ihren Lösungen

$$\eta_1 = F(\alpha,\ \alpha - \gamma + 1,\ \alpha - \beta + 1,\ \xi),$$
$$\eta_2 = \xi^{\beta-\alpha} F(\beta,\ \beta - \gamma + 1,\ \beta - \alpha + 1,\ \xi)$$

ergeben sich die Lösungen $y_1^{(\infty)}, y_2^{(\infty)}$ von (23).

Die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Fundamentalsystemen sind bei Schlesinger behandelt, ebenso die hier ausgeschlossenen Ausnahmefälle sowie die Integration der Gaußschen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale.

Außerdem sei auf die Behandlung der hypergeometrischen Funktionen im 3. Band des Traité d'Analyse von Picard (Kap. 12 und 13) und in den analytisch-funktionentheoretischen Vorlesungen von Fricke (S. 384—419) verwiesen; daselbst wird die durch die Gleichung

$$\eta = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

(worin y_1, y_2 zwei linear unabhängige Lösungen der Gaußschen Differentialgleichung darstellen) vermittelte konforme Abbildung behandelt, wobei sich ergibt, daß in gewissen Fällen x eine eindeutige Funktion von η ist.

Die Gaußsche Differentialgleichung geht, wenn man

$$\alpha = n + 1\,,\ \beta = -n\,,\ \gamma = 1$$

setzt, in

$$x(1 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + (1 - 2x)\frac{dy}{dx} + n(n + 1)\,y = 0$$

über; hieraus erhält man durch die Substitution $x = \dfrac{1 - \xi}{2}$ die Legendresche Differentialgleichung

$$(1 - \xi^2)\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dy}{d\xi} + n(n + 1)\,y = 0.$$

§ 42. Die Legendresche Differentialgleichung.

Die Legendresche Differentialgleichung

$$\frac{d\left((1 - x^2)\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} + n(n + 1)\,y = 0$$

oder

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n + 1)\,y = 0, \tag{28}$$

in welcher n eine ganze positive Zahl sein möge, ist vom Fuchsschen Typus; sie hat die singulären Stellen der Bestimmtheit $1, -1, \infty$. Da $x = 0$ eine reguläre Stelle ist, so wird (28) durch zwei linear unabhängige Potenzreihen y_1, y_2 befriedigt, welche sicher für $|x| < 1$ konvergieren. Durch Einsetzen der Reihe

$$y = c_0 + c_1 x + \cdots + c_\nu x^\nu + \cdots$$

in die Differentialgleichung (28) und Vergleichen der Koeffizienten von x^ν ergibt sich die Rekursionsformel

$$(\nu + 1)(\nu + 2)\, c_{\nu+2} + (n - \nu)(n + \nu + 1)\, c_\nu = 0,$$

aus welcher man, indem man $\nu = 0, 1, \ldots$ setzt, $c_2, c_3, \ldots$ berechnet, während c_0 und c_1 unbestimmt bleiben. Unter der Annahme $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ erhalten wir die Reihe

$$y_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n+1)(n-2)(n+3)}{4!} x^4 - \cdots,$$

unter der Annahme $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ die Reihe

$$y_2 = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4)}{5!} x^5 + \cdots.$$

Da n eine ganze positive Zahl sein soll, so bricht eine dieser Reihen mit dem Glied mit x^n ab, und zwar y_1, wenn n gerade, y_2, wenn n ungerade ist. In beiden Fällen wird die der Differentialgleichung genügende abbrechende Reihe (ganze rationale Funktion n^{ten} Grades) unter Hinzufügung eines konstanten Faktors dargestellt durch

$$(29)\quad \left\{ P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \ldots \right\} \right.$$

(Kugelfunktion, Legendresches Polynom).

Die zur singulären Stelle $x = \infty$ (oder $\xi = 0$ nach Vornahme der Substitution $x = \frac{1}{\xi}$) gehörige determinierende Fundamentalgleichung

$$r(r+1) - 2r - n(n+1) = r^2 - r - n(n+1) = 0$$

hat die Wurzeln $n + 1$ und $-n$. Zur Wurzel $-n$ gehört, wenn n wieder als ganze positive Zahl vorausgesetzt wird, die Lösung

$$P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot \xi^{-n} \left(1 - \frac{n(n-1)}{2(2n+1)} \xi^2 + \cdots \right),$$

so daß der Logarithmus fortfällt. Zur größten Wurzel $n+1$ gehört ohnehin eine von Logarithmen freie Lösung

$$y = g_0 \xi^{n+1} + g_1 \xi^{n+2} + \cdots = g_0 x^{-(n+1)} + g_1 x^{-(n+2)} + \cdots,$$

die nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten bei geeigneter Wahl von g_0 in folgender Form gefunden wird:

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} Q_n(x) = \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} \Big\{ & x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-(n+3)} \\ & + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \cdots \Big\}; \end{aligned} \right.$$

die Reihe ist für $|x| > 1$ konvergent (Kugelfunktion zweiter Art).

Die singuläre Stelle $x = 1$ hat die determinierende Fundamentalgleichung $r^2 = 0$; die eine zugehörige Lösung ist im Falle eines ganzen positiven n die nach Potenzen von $x - 1$ entwickelte Funktion $P_n(x)$, während die andere Lösung $\log(x-1)$ enthält. Entsprechendes gilt für die singuläre Stelle $x = -1$.

Die ganze Funktion n^{ten} Grades $P_n(x)$ läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$(31)\qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}.$$

Denn wenn man

$$u = (x^2 - 1)^n$$

setzt, ist

$$(x^2-1)\frac{du}{dx} - 2nxu = 0;$$

durch $(n+1)$malige Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$(x^2-1)\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} + 2x\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} - n(n+1)\frac{d^n u}{dx^n} = 0,$$

d. h. die ganze Funktion n^{ten} Grades

$$y = \frac{d^n u}{dx^n}$$

genügt der Legendreschen Differentialgleichung

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - n(n+1)y = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x)$$

mit den willkürlichen Konstanten A und B kann nur dann mit $\frac{d^n u}{dx^n}$ übereinstimmen, wenn $B = 0$ ist. Es ist also

$$\frac{d^n u}{dx^n} = A P_n(x);$$

die Vergleichung der Koeffizienten von x^n auf beiden Seiten der Gleichung ergibt

$$2n(2n-1)\ldots(n+1) = A \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

oder

$$A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n-1)\, 2n}{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)} = 2 \cdot 4 \ldots 2n = 2^n n!,$$

w. z. b. w.

Die Differentialgleichung

$$(32) \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left(n(n+1) - \frac{s^2}{1-x^2}\right) y = 0,$$

welche für $s = 0$ in die Legendresche Differentialgleichung (28) übergeht, wird für $s = 1, 2, \ldots, n$ durch die zugeordneten Kugelfunktionen

$$(33) \qquad P_n^{(s)}(x) = (1-x^2)^{\frac{s}{2}} \frac{d^s P_n(x)}{dx^s}, \qquad Q_n^{(s)}(x) = (1-x^2)^{\frac{s}{2}} \frac{d^s Q_n(x)}{dx^s}$$

befriedigt. Denn wenn man die Differentialgleichung (28) s-mal differentiiert und $\frac{d^s y}{dx^s}$ durch z ersetzt, erhält man die Gleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - 2(s+1)\,x\frac{dz}{dx} + (n-s)(n+s+1)\,z = 0;$$

wenn man jetzt

$$y = (1-x^2)^{\frac{s}{2}} z$$

setzt, ergibt sich für y die Differentialgleichung (32).

§ 43. Die Besselsche Differentialgleichung.

Die Besselsche Differentialgleichung

$$(34) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

hat die singuläre Stelle der Bestimmtheit $x = 0$; sie ist aber nicht vom Fuchsschen Typus, da $x = \infty$ keine Bestimmtheitsstelle ist. Wir schreiben die Differentialgleichung:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0,$$

so daß in (B) $n = 2$ und $\mathfrak{P}_1 = 1$, $\mathfrak{P}_2 = x^2$ ist. Nach (2) ist

$$f(x, r) = r(r-1) + r + x^2 = r^2 + x^2,$$

also $f(r) = r^2$, $f_1(r) = 0$, $f_2(r) = 1$, $f_3(r) = 0$, $f_4(r) = 0, \ldots$. Die determinierende Fundamentalgleichung $f(r) = r^2 = 0$ hat die Doppelwurzel $r = 0$. Wir lassen zunächst r unbestimmt, nehmen $g_0 = 1$ an und berechnen $g_1, g_2, \ldots, g_\nu, \ldots$ aus den Gleichungen (5) mit Ausschluß der ersten:

$$g_1(r+1)^2 = 0; \qquad g_\nu(r+\nu)^2 + g_{\nu-2} = 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots).$$

Demnach ist $g_1 = g_3 = \cdots = 0$,

$$g_0 = 1, \qquad g_2 = -\frac{1}{(r+2)^2}, \qquad g_4 = \frac{1}{(r+2)^2 (r+4)^2}, \qquad \ldots,$$

$$g_{2\mu} = \frac{(-1)^\mu}{(r+2)^2 (r+4)^2 \ldots (r+2\mu)^2}, \quad \ldots,$$

also

$$g(x, r) = x^r \left\{ 1 - \frac{x^2}{(r+2)^2} + \frac{x^4}{(r+2)^2 (r+4)^2} - \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^\mu x^{2\mu}}{(r+2)^2 (r+4)^2 \ldots (r+2\mu)^2} + \cdots \right\},$$

$$\frac{\partial g(x, r)}{\partial r} = x^r \log x \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu x^{2\mu}}{(r+2)^2 (r+4)^2 \ldots (r+2\mu)^2}$$

$$- x^r \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\mu x^{2\mu}}{(r+2)^2 (r+4)^2 \ldots (r+2\mu)^2} \left(\frac{2}{r+2} + \frac{2}{r+4} + \cdots + \frac{2}{r+2\mu} \right).$$

Die Differentialgleichung hat die Lösungen

$$y_1 = g(x, 0), \qquad y_2 = \left(\frac{\partial g(x, r)}{\partial r} \right)_{r=0}$$

oder

$$y_1 = J_0(x), \qquad y_2 = Y_0(x),$$

wenn gesetzt wird:

$$(35)\qquad J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \cdots + \frac{(-1)^\mu x^{2\mu}}{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2\mu)^2} + \cdots,$$

$$(36)\qquad Y_0(x) = J_0(x) \log x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{(-1)^{\mu-1} x^{2\mu}}{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2\mu)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\mu}\right) + \cdots$$

$J_0(x)$ und $Y_0(x)$ sind die Besselschen oder Zylinderfunktionen erster bzw. zweiter Art von der Ordnung 0.

Die allgemeinere Besselsche Differentialgleichung

$$(37)\qquad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)\, y = 0,$$

welche für $n = 0$ in die Differentialgleichung (34) übergeht, wird ebenso wie diese behandelt. Jetzt ist $\mathfrak{P}_1 = 1$, $\mathfrak{P}_2 = x^2 - n^2$,

$$f(x, r) = r^2 + x^2 - n^2,$$

also $f(r) = r^2 - n^2$, $f_1(r) = 0$, $f_2(r) = 1$, $f_3(r) = 0, \ldots$. Die determinierende Fundamentalgleichung $f(r) = r^2 - n^2 = 0$ hat die beiden Wurzeln n und $-n$.

Die Rekursionsformel (5) wird jetzt

$$g_\nu f(r + \nu) + g_{\nu-2} f_2(r + \nu - 2) = 0$$

oder

$$g_\nu = -\frac{g_{\nu-2}}{(r + \nu)^2 - n^2} = -\frac{g_{\nu-2}}{(r + n + \nu)(r - n + \nu)}.$$

Man hat $g_1 = g_3 = \cdots = 0$ und

$$g_2 = -\frac{g_0}{(r + n + 2)(r - n + 2)}, \quad \ldots,$$

$$g_{2\mu} = \frac{(-1)^\mu g_0}{(r + n + 2) \ldots (r + n + 2\mu)(r - n + 2) \ldots (r - n + 2\mu)},$$

also

$$g(x, r) = g_0 x^r \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu x^{2\mu}}{(r + n + 2) \ldots (r + n + 2\mu)(r - n + 2) \ldots (r - n + 2\mu)}.$$

Ist n eine positive, aber nicht ganze Zahl, so setzen wir

$$g_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n + 1)}.$$

Die beiden Lösungen $g(x, n)$ und $g(x, -n)$ sind dann

$$J_n(x), \qquad J_{-n}(x);$$

dabei ist

$$(38)\quad \left\{ J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \cdot \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \cdots + \frac{(-1)^\mu x^{2\mu}}{2 \cdot 4 \ldots 2\mu \cdot (2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2\mu)} + \cdots \right\} \right.$$

(Besselsche Funktion n^{ter} Ordnung erster Art) für alle Werte von x konvergent.

Ist n eine ganze positive Zahl, also die Differenz $2n$ der beiden Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung eine ganze Zahl, so bleibt die Lösung $J_n(x)$ bestehen. Eine zweite Lösung erhalten wir nach der Methode von Frobenius, indem wir

$$g_0 = f(r+2) \ldots f(r+2n)\, C$$
$$= C \prod_{\lambda=1}^{n} [(r+2\lambda)^2 - n^2]$$

setzen, wo C von r unabhängig ist. (Die Faktoren $f(r+1), f(r+3), \ldots$ brauchen in g_0 nicht vorzukommen, weil hier diese Größen auch nicht als Nenner auftreten.) So ergibt sich

$$g(x, r) = C \prod_{\lambda=1}^{n} [(r+2\lambda)^2 - n^2] \cdot x^r \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu x^{2\mu}}{[(r+2)^2 - n^2] \ldots [(r+2\mu)^2 - n^2]}$$

oder, wenn $\sum_{\mu=0}^{\infty}$ in $\sum_{\mu=0}^{n-1}$ und $\sum_{\mu=n}^{\infty}$ zerlegt wird,

$$g(x, r) = C x^r \sum_{\mu=0}^{n-1} [(r+2\mu+2)^2 - n^2] \ldots [(r+2n)^2 - n^2] \cdot (-1)^\mu x^{2\mu}$$
$$+ C(-1)^n x^{r+2n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{[(r+2n+2)^2 - n^2] \ldots [(r+2n+2\nu)^2 - n^2]}.$$ [1])

Für $r = -n$ verschwindet die erste Zeile von $g(x, r)$, während die zweite Zeile, wenn man

$$C = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$$

setzt, in $J_n(x)$ übergeht. Wir bilden die neue Lösung

$$y = \left(\frac{\partial g(x, r)}{\partial r} \right)_{r=-n}.$$

---

[1]) Hier ist $\mu = n + \nu$ gesetzt, so daß $\sum_{\mu=n}^{\infty}$ in $\sum_{\nu=0}^{\infty}$ übergeht.

Wir haben

$$\frac{\partial g(x,r)}{\partial r} = Cx^r \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{dP_\mu}{dr}(-1)^\mu x^{2\mu} + Cx^r \log x \sum_{\mu=0}^{n-1} P_\mu (-1)^\mu x^{2\mu}$$
$$+ C(-1)^n x^{r+2n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{dQ_\nu}{dr}(-1)^\nu x^{2\nu} + C(-1)^n x^{r+2n} \log x \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu (-1)^\nu x^{2\nu},$$

wobei gesetzt ist:

$$P_\mu = [(r+2\mu+2)^2 - n^2] \ldots [(r+2n)^2 - n^2] = \prod_{\lambda=\mu+1}^{n} (r+n+2\lambda)(r-n+2\lambda),$$

$$Q_\nu = \frac{1}{[(r+2n+2)^2 - n^2] \ldots [(r+2n+2\nu)^2 - n^2]}$$
$$= \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^{\nu} (r+3n+2\lambda)(r+n+2\lambda)}.$$

Für $r = -n$ ist $P_\mu = 0$ und

$$Q_\nu = \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^{\nu} 2\lambda(2n+2\lambda)}.$$

Durch logarithmische Differentiation erhält man

$$\frac{dQ_\nu}{dr} = -Q_\nu \sum_{\lambda=1}^{\nu} \left(\frac{1}{r+n+2\lambda} + \frac{1}{r+3n+2\lambda} \right);$$

für $r = -n$ ist also

$$\frac{dQ_\nu}{dr} = -\frac{1}{\prod_{\lambda=1}^{\nu} 2\lambda(2n+2\lambda)} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{n+\lambda} \right).$$

Weiter erhält man durch logarithmische Differentiation

$$\frac{dP_\mu}{dr} = P_\mu \cdot \sum_{\lambda=\mu+1}^{n} \left(\frac{1}{r+n+2\lambda} + \frac{1}{r-n+2\lambda} \right);$$

$\frac{P_\mu}{r+n}$ hat für $r = -n$ den Wert

$$(\alpha) \qquad (-1)^{n-\mu-1} 2^{2n-2\mu-1} \cdot \frac{n!(n-\mu-1)!}{\mu!},$$

während alle Glieder von $\sum_{\lambda=\mu+1}^{n}$ mit Ausnahme von $\frac{1}{r+n}$ für $r = -n$ endlich sind. Daher stellt der Ausdruck (α) den Wert von $\frac{dP_\mu}{dr}$ für $r = -n$ dar.

Demnach ist

$$y = \left(\frac{\partial g(x,r)}{\partial r}\right)_{r=-n} = C(-1)^{n-1} n!\, x^{-n} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{2^{2n-2\mu-1}(n-\mu-1)!\, x^{2\mu}}{\mu!}$$

$$+ \frac{1}{2} C(-1)^{n-1} x^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}}{1\cdot 2 \ldots \nu \cdot (n+1)\ldots(n+\nu)} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+\nu}\right)$$

$$+ C(-1)^n x^n \log x \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}}{1\cdot 2 \ldots \nu \cdot (n+1)\ldots(n+\nu)}.$$

Nach Einsetzung des oben angegebenen Wertes von C addieren wir zu der gefundenen Lösung y noch die partikuläre Lösung

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) J_n(x).$$

So erhält man die zweite partikuläre Lösung

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} Y_n(x) &= J_n(x) \log x \\ &\quad - x^{-n} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{2^{n-2\mu-1}(n-\mu-1)!\, x^{2\mu}}{\mu!} \\ &\quad - \frac{x^n}{2^{n+1} n!} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu k_{n\nu}\, x^{2\nu}}{2\cdot 4 \ldots 2\nu \cdot (2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2\nu)}, \end{aligned} \right.$$

wobei gesetzt ist:

$$k_{n\nu} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+\nu}$$

(Besselsche Funktion n^{ter} Ordnung zweiter Art).

Durch die Substitution

$$y = x^n u$$

geht die Besselsche Differentialgleichung (37) in die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + (2n+1)\frac{du}{dx} + xu = 0$$

über, deren Koeffizienten lineare Funktionen von x sind. Die allgemeinere lineare Differentialgleichung mit linearen Koeffizienten, die Laplacesche Differentialgleichung

$$(a_0 x + b_0)\frac{d^2u}{dx^2} + (a_1 x + b_1)\frac{du}{dx} + (a_2 x + b_2)\, u = 0$$

kann mit Hilfe bestimmter Integrale integriert werden. Es sei auf das 8. Kapitel von Schlesinger, Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage (3. Aufl. 1922) verwiesen. So ergibt sich, wie a. a. O. gezeigt wird, das Verhalten der Integrale der Laplaceschen Differentialgleichung, insbesondere auch der Besselschen Funktionen, für große Werte von x.

§ 44. Reihenentwicklung der Integrale in der Umgebung einer allgemeineren singulären Stelle.

Wir wenden uns jetzt zu der Untersuchung der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer singulären Stelle allgemeinerer Art, beschränken uns aber der Einfachheit halber auf die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)\,y = 0. \tag{C}$$

Man könnte zunächst die Annahme machen, daß $x = 0$ ein Pol beliebiger Ordnung für die Koeffizienten der Differentialgleichung ist, daß man also hat:

$$P_1 = \frac{\mathfrak{P}_1(x)}{x^{p_1}}, \quad P_2 = \frac{\mathfrak{P}_2(x)}{x^{p_2}},$$

wo p_1, p_2 ganze positive Zahlen und $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Funktionen sind; P_1, P_2 lassen sich nach positiven und negativen Potenzen von x entwickeln, aber so, daß negative Potenzen nur in endlicher Anzahl vorkommen. Wir machen sogleich die allgemeinere Annahme, daß sich P_1, P_2 in Laurentsche Reihen entwickeln lassen, d. h. in Reihen, welche nach positiven und negativen Potenzen von x fortschreiten und in dem Gebiet $0 < |x| < R$ konvergent sind. Wir können ebensogut voraussetzen, daß die Laurentschen Reihen für P_1, P_2 in der Ringfläche $0 < R' < |x| < R$ konvergieren; dies ist dann der Fall, wenn die Funktionen P_1, P_2 in dieser Ringfläche, die wir $\mathfrak{R}$ nennen, eindeutig und regulär sind.

Die Veränderliche x durchlaufe, ausgehend von der innerhalb der Ringfläche $\mathfrak{R}$ gelegenen regulären Stelle $x = x_0$, einen Kreis $\mathfrak{U}$ vom Mittelpunkt $x = 0$ im positiven Sinne. Die Elemente y_1, y_2 eines Fundamentalsystems, welche zunächst in der Umgebung von $x = x_0$ definiert sind, gehen, wenn sie längs des geschlossenen Weges $\mathfrak{U}$ fortgesetzt werden, in andere Funktionen $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ über, welche ebenfalls der Differentialgleichung genügen und sich wie jede Lösung derselben als lineare homogene Funktionen von y_1, y_2 darstellen lassen:

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \bar{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2; \end{cases} \tag{40}$$

die Koeffizienten $a_{11}, \ldots, a_{22}$ sind Konstante, deren Werte wir zunächst nicht kennen. Mit anderen Worten, das Fundamentalsystem y_1, y_2 erfährt bei dem Umlauf $\mathfrak{U}$ die durch die Gleichungen (40) dargestellte lineare Substitution S.

Um ein Fundamentalsystem zu finden, welches bei dem Umlauf $\mathfrak{U}$ eine möglichst einfache Substitution erfährt, verfahren wir wie in § 30 bei der Behandlung einer linearen Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten.

Hat die Fundamentalgleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0 \tag{41}$$

zwei verschiedene Wurzeln s_1, s_2, die notwendig von Null verschieden sind, so ist ein Fundamentalsystem Y_1, Y_2 vorhanden, welches bei dem Umlauf $\mathfrak{U}$ in

$$\bar{Y}_i = s_i Y_i \qquad (i = 1, 2) \tag{42}$$

übergeht. Setzt man

$$s_i = e^{2\pi r_i \sqrt{-1}}, \quad r_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log s_i \qquad (i = 1, 2),$$

so ist $\log s_i$ nur bis auf Vielfache von $2\pi\sqrt{-1}$, r_i nur bis auf ganze Zahlen bestimmt. Durch den Umlauf $\mathfrak{U}$ geht x^{r_i} in

$$x^{r_i} e^{2\pi r_i \sqrt{-1}} = s_i x^{r_i},$$

Y_i in $s_i Y_i$ über, also bleibt

$$\varphi_i = \frac{Y_i}{x^{r_i}}$$

ungeändert. Die innerhalb der Ringfläche $\mathfrak{R}$ eindeutige Funktion φ_i läßt sich in eine nach positiven und negativen Potenzen von x fortschreitende Reihe (eine Laurentsche Reihe) von der Form

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu x^\nu$$

entwickeln, welche innerhalb $\mathfrak{R}$ konvergiert. Unser Fundamentalsystem gestattet also innerhalb der Ringfläche $\mathfrak{R}$ die Entwicklung

$$Y_i = x^{r_i} \varphi_i \qquad (i = 1, 2). \tag{43}$$

Ist der Radius R' des inneren die Ringfläche $\mathfrak{R}$ begrenzenden Kreises gleich Null, so sind die Laurentschen Reihen für die Funktionen φ_i innerhalb des Kreises $|x| = R$ mit Ausschluß des Mittelpunktes $x = 0$ konvergent.

Hat die Fundamentalgleichung (41) eine Doppelwurzel s_0, so sind zwei Fälle möglich.

Im Falle $a_{11} = a_{22} = s_0$, $a_{12} = a_{21} = 0$ geht ein Fundamentalsystem $Y_i\,(i = 1, 2)$ beim Umlauf $\mathfrak{U}$ in

$$\bar{Y}_i = s_0 Y_i \qquad (i = 1, 2) \tag{44}$$

über. In der Ringfläche $\mathfrak{R}$ ist

$$Y_i = x^{r_0}\varphi_i \qquad (i = 1, 2), \tag{45}$$

wo

$$s_0 = e^{2\pi r_0\sqrt{-1}}$$

ist und die φ_i Laurentsche Reihen sind.

Andernfalls ist ein Fundamentalsystem Y_1, Y_2 vorhanden, welches durch den Umlauf $\mathfrak{U}$ in

$$\bar{Y}_1 = s_0 Y_1, \quad \bar{Y}_2 = s_0 Y_2 + Y_1 \tag{46}$$

übergeführt wird. In der Ringfläche $\mathfrak{R}$ ist dann

$$\begin{cases} Y_1 = x^{r_0}\varphi_1, \\ Y_2 = x^{r_0}\left(\varphi_2 + \varphi_1 \dfrac{\log x}{2\pi s_0\sqrt{-1}}\right), \end{cases} \tag{47}$$

wo φ_1, φ_2 Laurentsche Reihen sind.

Es bietet sich nun die Aufgabe dar, die Exponenten r_1, r_2 bzw. r_0 und die Koeffizienten der Laurentschen Reihen φ_1, φ_2 zu berechnen. Nach § 25 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $P_1(x) \equiv 0$ voraussetzen. Setzen wir

$$P_2(x) = \frac{Q(x)}{x^2}, \quad Q(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \alpha_\nu x^\nu,$$

so haben wir die Differentialgleichung

$$D(y) = x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x)\, y = 0, \tag{48}$$

welche sicher eine Lösung von der Form

$$y = x^r \varphi = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_\nu x^{r+\nu} \tag{49}$$

besitzt. Wir setzen diesen Ausdruck in die Differentialgleichung (48) ein, ordnen nach Potenzen von x und setzen den Koeffizienten von $x^{r+\nu}$ $(\nu = -\infty \cdots +\infty)$ gleich Null. Man hat

$$D(x^r) = x^r f(x, r),$$

$$f(x, r) = r(r-1) + Q(x) = r(r-1) + \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \alpha_\lambda x^\lambda,$$

also, wenn für y die Reihe (49) gesetzt wird,

$$D(y) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_\nu D(x^{r+\nu}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_\nu x^{r+\nu} f(x, r+\nu)$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_\nu x^{r+\nu} \left((r+\nu)\,(r+\nu-1) + \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \alpha_\lambda x^\lambda \right) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} G_\nu x^{r+\nu},$$

$$G_\nu = g_\nu (r+\nu)\,(r+\nu-1) + \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{\nu-\lambda}\alpha_\lambda .$$

Damit die Reihe (49) die Differentialgleichung (48) befriedigt, müssen also die Größen r und $g_\nu (\nu = -\infty \cdots +\infty)$ den unendlich vielen, in den g_ν linearen Gleichungen

$$G_\nu = 0 \qquad (\nu = -\infty \cdots +\infty)$$

genügen.

Wenn man $\nu - \lambda = \mu$, also $\lambda = \nu - \mu$ setzt, wo μ alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt, hat man die Gleichungen

$$(r+\nu)(r+\nu-1)g_\nu + \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \alpha_{\nu-\mu} g_\mu = 0 \qquad (\nu = -\infty \cdots +\infty)$$

oder

$$[(r+\nu)(r+\nu-1) + \alpha_0]\, g_\nu + \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \alpha_{\nu-\mu} g_\mu = 0 \qquad (\nu = -\infty \cdots +\infty),$$

wo bei Σ' der Wert $\mu = \nu$ auszuschließen ist. Wir schreiben diese Gleichungen in der Form

$$g_\nu + \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\alpha_{\nu-\mu}}{(r+\nu)(r+\nu-1) + \alpha_0} g_\mu = 0 \qquad (\nu = -\infty \cdots +\infty)$$

oder unter Anwendung der Bezeichnung

$$\psi_{\nu\nu} = 1,$$

$$\psi_{\nu\mu} = \frac{\alpha_{\nu-\mu}}{(r+\nu)(r+\nu-1) + \alpha_0} \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

in der Form

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \psi_{\nu\mu} g_\mu = 0 \qquad (\nu = -\infty \cdots +\infty).$$

Wenn man auf dieses Gleichungssystem, trotzdem die Zahl der Gleichungen und die Zahl der Unbekannten unendlich ist, die Theorie der Determinanten zunächst formal anwendet, erhält man zur Bestimmung von r die Gleichung

$$\Omega(r) = |\,\psi_{\nu\mu}\,| = 0 \qquad (\nu, \mu = -\infty \cdots +\infty),$$

wo $\mathfrak{Q}(r)$ eine Determinante mit unendlich vielen Horizontalreihen und unendlich vielen Vertikalreihen ist.

H. v. Koch (Acta math., Bd. 15, 16) hat eine Theorie der unendlichen Determinanten entwickelt und mit ihrer Hilfe die Reihenentwicklung der Integrale einer linearen Differentialgleichung in einem Kreisring und in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle berechnet, während L. Fuchs nur die Form der Reihen festgestellt hatte. Wir gehen hierauf nicht ein[1]).

Die Besselsche Differentialgleichung (37) hat zwei singuläre Stellen, die Stelle der Bestimmtheit $x = 0$ und die Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$. Ein Umlauf um $x = \infty$ ist zugleich ein Umlauf um $x = 0$; die früheren Reihenentwicklungen für J_n, J_{-n} bzw. J_n, Y_n sind zugleich die Reihenentwicklungen des gegenwärtigen Paragraphen, es vereinfachen sich nur die Laurentschen Reihen, welche negative Potenzen von x entweder gar nicht oder nur in endlicher Anzahl enthalten.

Die im allgemeinen schwer zu berechnenden Reihenentwicklungen des § 44 geben Auskunft über das Verhalten der Integrale bei einem Umlauf um eine singuläre Stelle der Unbestimmtheit. In manchen Fällen lassen sich leicht zu berechnende, aber divergente Reihen aufstellen, welche der Differentialgleichung formal genügen und trotz ihrer Divergenz Aufschluß über das Verhalten der Integrale bei der Annäherung an eine Unbestimmtheitsstelle (die man in $x = \infty$ legen kann) geben, indem sie die Integrale nach Poincaré asymptotisch darstellen. Der Hinweis auf das Buch von Schlesinger am Schluß von § 43 sei hier wiederholt.

Die in § 30 behandelte Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten läßt sich mit den Untersuchungen des gegenwärtigen Paragraphen in Verbindung bringen.

Die Koeffizienten $P_1(t)$, $P_2(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P_1(t)\frac{dy}{dt} + P_2(t)\,y = 0 \tag{50}$$

seien analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen $t = u + iv$, welche sich in dem die reelle Achse der t-Ebene enthaltenden Streifen $-h < v < h'$ (h und h' sind positive Größen) regulär verhalten und die Periode 2π besitzen. Durch die Substitution

$$x = e^{it}$$

wird der erwähnte Streifen der t-Ebene in Anbetracht der Gleichung $|x| = e^{-v}$ auf den Kreisring $R' < |x| < R$ in der x-Ebene abgebildet;

[1]) In der ersten Auflage ist die v. Kochsche Methode im VIII. Abschnitt dargestellt.

dabei ist $e^{-h'} = R'$, $e^{h} = R$ und $0 < R' < 1 < R$. Die Differentialgleichung (50) geht über in die Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x Q_1(x) \frac{dy}{dx} + Q_2(x)\, y = 0 \tag{51}$$

mit den Koeffizienten $Q_1(x) = 1 - iP_1(t)$, $Q_2(x) = -P_2(t)$.

Die Funktionen $P_1(t)$, $P_2(t)$ besitzen der Voraussetzung nach die Periode 2π, d. h. sie bleiben ungeändert, wenn das Argument u der komplexen Größe $x = e^{-v} \cdot e^{iu}$ um 2π wächst oder wenn die Veränderliche x innerhalb der Ringfläche $R' < |x| < R$ einen Umlauf um den Nullpunkt ausführt. Die in der Differentialgleichung (51) auftretenden Funktionen $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ lassen sich also in der Ringfläche $R' < |x| < R$ in Laurentsche Reihen entwickeln.

Die in § 31 betrachtete Differentialgleichung (F), in anderer Bezeichnung

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (a + b\cos t)z = 0$$

geht durch die Substitution

$$x = e^{it}, \quad y = e^{\frac{1}{2}it} z$$

in die Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1}{4} - a - \frac{b}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) y = 0$$

mit den beiden Unbestimmtheitsstellen $x = 0$ und $x = \infty$ über. Es sind im allgemeinen zwei linear unabhängige Integrale von der Form

$$y = x^r \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_\nu x^\nu$$

vorhanden, wo die Laurentschen Reihen für alle endlichen, von Null verschiedenen Werte von x konvergieren. Man kann r und die Koeffizienten g_ν nach der v. Kochschen Methode bestimmen und an Stelle von x und y wieder t und z einführen. Damit hat man die in § 30 nachgewiesenen Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten vermittels unendlicher Determinanten berechnet.

Zur Integration der in der Mondtheorie vorkommenden Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\Theta_0 + 2\Theta_1 \cos t + 2\Theta_2 \cos 2t + \cdots) z = 0$$

sind die unendlichen Determinanten von Hill eingeführt worden (Act. math., Bd. 8).

§ 45. Form der Differentialgleichung in der Umgebung einer singulären Stelle der Bestimmtheit.

Die Koeffizienten $P_1(x)$, $P_2(x)$ der linearen Differentialgleichung

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)\,y = 0$$

seien eindeutige analytische Funktionen, welche im Innern eines um den singulären Punkt $x = 0$ mit dem Radius $R > 0$ beschriebenen Kreises keinen weiteren singulären Punkt besitzen. Wir haben in § 44 nachgewiesen, daß zwei linear unabhängige Integrale

$$\text{(52)} \qquad y_1 = x^{r_1}\varphi_1(x), \quad y_2 = x^{r_2}(\varphi_2(x) + c\varphi_1(x)\log x)$$

vorhanden sind, worin $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ in Reihen entwickelbar sind, welche nach positiven und negativen Potenzen von x fortschreiten; c ist eine Konstante, die nur dann von Null verschieden sein kann, wenn sich r_1 und r_2 nur um eine ganze Zahl unterscheiden, so daß $r_2 = r_1$ angenommen werden kann.

Wir sagen mit L. Fuchs, eine der Funktionen (52) verhält sich an der singulären Stelle $x = 0$ bestimmt, wenn die Laurentschen Reihenentwicklungen der darin enthaltenen Funktionen φ negative Potenzen von x entweder gar nicht oder nur in endlicher Anzahl enthalten.

Wir nehmen an, die Differentialgleichung (C) besitze ein Fundamentalsystem von Lösungen, welche sich an der singulären Stelle $x = 0$ bestimmt verhalten; die singuläre Stelle $x = 0$ wird dann als singuläre Stelle der Bestimmtheit bezeichnet.

Wenn sich nicht alle Lösungen der Differentialgleichung an der singulären Stelle $x = 0$ bestimmt verhalten, so ist $x = 0$ eine singuläre Stelle der Unbestimmtheit (Unbestimmtheitsstelle).

Wir beweisen den Satz:

Soll $x = 0$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit sein, so muß die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung die Gestalt haben:

$$\text{(D)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\mathfrak{P}_1(x)}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{\mathfrak{P}_2(x)}{x^2}\,y = 0,$$

worin $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Funktionen sind.

Der entsprechende Satz gilt für eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\text{(53)} \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)\,y = 0.$$

Wir nehmen an, diese habe eine Lösung

$$y = x^r \varphi(x), \tag{54}$$

wo $\varphi(x)$ nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen von x enthält. Ist

$$\varphi(x) = a x^m + a_1 x^{m+1} + \cdots,$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl einschließlich Null und a von Null verschieden ist, so ist

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{m a x^{m-1} + \cdots}{a x^m + \cdots} = \frac{\mathfrak{p}(x)}{x},$$

wo $\mathfrak{p}(x)$ bei $x = 0$ regulär ist. Aus der Differentialgleichung (53) folgt

$$P(x) = -\frac{d \log y}{dx} = -\frac{r}{x} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\mathfrak{P}(x)}{x}, \tag{55}$$

wo $\mathfrak{P}(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ regulär ist.

Ist $x = 0$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung zweiter Ordnung (C), so ist eine Lösung

$$y_1 = x^{r_1} \varphi_1(x) \tag{56}$$

vorhanden, wo $\varphi_1(x)$ gar keine oder nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen von x enthält. Setzt man

$$y = y_1 \int z \, dx, \tag{57}$$

so genügt z nach § 25 der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} + Q_1 z = 0 \tag{58}$$

mit dem Koeffizienten

$$Q_1 = \frac{1}{y_1}\left(2\frac{dy_1}{dx} + P_1 y_1\right). \tag{59}$$

Aus einer von y_1 verschiedenen Lösung y von (C), welche sich bei $x = 0$ bestimmt verhält, ergibt sich vermittels der Gleichung

$$z = \frac{d}{dx}\frac{y}{y_1}$$

eine Lösung gleicher Beschaffenheit von (58). Denn wenn

$$y_2 = x^{r_2} \varphi_2(x)$$

ist, ist

$$\frac{y_2}{y_1} = x^{r_2 - r_1} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$$

das Produkt aus $x^{r_2-r_1}$ und einer Potenzreihe von x, welche höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von x enthält, und dasselbe gilt für die Ableitung von $\frac{y_2}{y_1}$; ist im Falle $r_1 = r_2$

$$y_2 = x^{r_1}(\varphi_2(x) + c\varphi_1(x)\log x),$$

so ist

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} + c\log x,$$

und durch Differentiation ergibt sich eine Reihe, welche negative Potenzen von x nur in endlicher Anzahl enthält. — Nach dem für die Differentialgleichung erster Ordnung bewiesenen Satze ist also

$$Q_1 = \frac{\mathfrak{Q}_1(x)}{x},$$

wo sich $\mathfrak{Q}_1$ bei $x = 0$ regulär verhält. Die Gleichung (59) schreibt sich

$$P_1 = Q_1 - 2\frac{d\log y_1}{dx}.$$

Es ist also

$$P_1 = \frac{\mathfrak{Q}_1(x)}{x} - \frac{2r_1}{x} - \frac{2\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{\mathfrak{P}_1(x)}{x},$$

wo $\mathfrak{P}_1(x)$ bei $x = 0$ regulär ist. Setzt man in der Differentialgleichung (C) $y = y_1$ und löst man nach P_2 auf, so erhält man

$$P_2 = -\frac{\frac{d^2y_1}{dx^2}}{y_1} - P_1\frac{d\log y_1}{dx} = -\frac{d^2\log y_1}{dx^2} - \left(\frac{d\log y_1}{dx}\right)^2 - P_1\frac{d\log y_1}{dx} = \frac{\mathfrak{P}_2(x)}{x^2},$$

wo $\mathfrak{P}_2(x)$ sich bei $x = 0$ regulär verhält.

Durch Übertragung der Untersuchungen der letzten Paragraphen auf Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung findet man, daß eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit der singulären Stelle der Bestimmtheit $x = 0$ die in §§ 37—39 behandelte Form (B) haben muß.

Achtes Kapitel.

Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten.

§ 46. Abhängigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen von Parametern.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu) \tag{1}$$

zwischen den reellen Veränderlichen x, y unter der Voraussetzung, daß die rechte Seite von einem reellen Parameter μ abhängt.

Die Funktion $f(x, y, \mu)$ sei für

$$|x - a| \leqq h, \qquad |y - b| \leqq H, \qquad |\mu| \leqq \mathfrak{r}$$

stetig, und es sei für diese Werte von x, y, μ

$$|f(x, y, \mu)| \leqq M;$$

ferner sei, wenn auch $|Y - b| \leqq H$ ist,

$$|f(x, Y, \mu) - f(x, y, \mu)| \leqq K\,|Y - y|;$$

die positiven Größen M und K sollen von μ nicht abhängen.

Wir wenden die Methode der schrittweisen Annäherung wie in § 11 an, indem wir von $y_0 = b$ ausgehen. Zur Berechnung von y_n dient die Rekursionsformel

$$y_n - b = \int_a^x f(x, y_{n-1}, \mu)\, dx.$$

Für $|x - a| \leqq \varrho$, $|\mu| \leqq \mathfrak{r}$, wo ϱ wie in § 11 definiert ist, ist

$$|y_n - y_{n-1}| \leqq \frac{M K^{n-1} |x - a|^{n-1}}{(n-1)!};$$

die Reihe

$$y = b + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1})$$

ist also für $|x-a| \leqq \varrho$, $|\mu| \leqq \mathfrak{r}$ absolut und gleichmäßig konvergent. Die Reihensumme y ist eine für $|x-a| \leqq \varrho$, $|\mu| \leqq \mathfrak{r}$ stetige Funktion von x und μ, da alle Glieder der gleichmäßig konvergenten Reihe stetige Funktionen von x und μ sind. Die durch die Anfangsbedingung $x=a$, $y=b$ bestimmte Lösung $y=\varphi(x,\mu)$ der Differentialgleichung (1) ist also eine stetige Funktion des Parameters μ, wenn $f(x,y,\mu)$ stetig von μ abhängt.

Wir fragen weiter, ob eine partielle Ableitung von y nach μ vorhanden ist. Wir setzen jetzt voraus, daß partielle Ableitungen erster Ordnung von $f(x,y,\mu)$ nach y und nach μ vorhanden sind, die stetig von x, y, μ abhängen.

Die oben bestimmte Lösung $y=\varphi(x,\mu)$ der Differentialgleichung (1), welche für $x=a$ den Wert $\varphi(a,\mu)=b$ annimmt, geht, wenn μ um $\Delta\mu$ wächst, in $y+\Delta y=\varphi(x,\mu+\Delta\mu)$ über, und für $x=a$ ist $y+\Delta y=\varphi(a,\mu+\Delta\mu)=b$. Aus den Gleichungen

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\mu), \quad \frac{d(y+\Delta y)}{dx}=f(x,\,y+\Delta y,\,\mu+\Delta\mu)$$

folgt durch Subtraktion und Division durch $\Delta\mu$

$$\frac{d\dfrac{\Delta y}{\Delta\mu}}{dx}=\frac{f(x,y+\Delta y,\mu+\Delta\mu)-f(x,y,\mu)}{\Delta\mu};$$

nach dem Mittelwertsatz ist, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y, \quad \frac{\partial f}{\partial\mu}=f_\mu$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} &f(x,y+\Delta y,\,\mu+\Delta\mu)-f(x,y,\mu)\\ &\quad=f_y(x,\,y+\Theta\Delta y,\mu+\Theta\Delta\mu)\cdot\Delta y+f_\mu(x,y+\Theta\Delta y,\mu+\Theta\Delta\mu)\cdot\Delta\mu, \end{aligned}$$

wo $0<\Theta<1$ ist. Demnach ist

$$\frac{d\dfrac{\Delta y}{\Delta\mu}}{dx}=f_y(x,\,y+\Theta\Delta y,\mu+\Theta\Delta\mu)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta\mu}+f_\mu(x,\,y+\Theta\Delta y,\mu+\Theta\Delta\mu), \tag{2}$$

das ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für den Differenzenquotienten $\dfrac{\Delta y}{\Delta\mu}$. Da für $x=a$ sowohl y als auch $y+\Delta y$ den Wert b annimmt, so ist $\dfrac{\Delta y}{\Delta\mu}=0$ für $x=a$. Wenn man unter Berücksichtigung

dieser Anfangsbedingung die lineare Differentialgleichung (2) nach § 5 integriert, erhält man

$$\frac{\Delta y}{\Delta \mu} = e^{\int_a^x f_y(x, y+\Theta\Delta y, \mu+\Theta\Delta\mu)\,dx} \int_a^x f_\mu(x, y+\Theta\Delta y, \mu+\Theta\Delta\mu) \cdot e^{-\int_a^x f_y(x, y+\Theta\Delta y, \mu+\Theta\Delta\mu)\,dx} dx. \tag{3}$$

Da f_y und f_μ der Voraussetzung nach stetige Funktionen ihrer sämtlichen Argumente sind, so ergibt der Grenzübergang $\Delta\mu \to 0$

$$\frac{\partial y}{\partial \mu} = e^{\int_a^x f_y(x, y, \mu)\,dx} \int_a^x f_\mu(x, y, \mu)\, e^{-\int_a^x f_y(x, y, \mu)\,dx} dx \tag{4}$$

als stetige Funktion von x, y, μ; d. h. die partielle Ableitung von y nach dem Parameter μ genügt der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d\frac{\partial y}{\partial \mu}}{dx} = f_y(x, y, \mu)\frac{\partial y}{\partial \mu} + f_\mu(x, y, \mu)$$

und der Anfangsbedingung $\frac{\partial y}{\partial \mu} = 0$ für $x = a$.

Die bisherigen Untersuchungen lassen sich auf Systeme von Differentialgleichungen mit mehreren Parametern übertragen, so daß wir ohne weiteres folgenden Satz aussprechen können:

In dem Differentialgleichungssystem mit den Parametern $\mu_1, \mu_2, \ldots$

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \mu_2, \ldots) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

seien die Funktionen f_i nebst den Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial y_n}, \frac{\partial f_i}{\partial \mu_1}, \frac{\partial f_i}{\partial \mu_2}, \ldots$ in einem gewissen Gebiet in bezug auf sämtliche Argumente $x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1\ \mu_2, \ldots$ stetig. Die den Differentialgleichungen genügenden Funktionen y_i $(i = 1, \ldots, n)$, welche durch die (von $\mu_1, \mu_2, \ldots$ unabhängige) Anfangsbedingung $x = a$, $y_1 = b_1, \ldots, y_n = b_n$ bestimmt sind, sind nebst den Ableitungen $\frac{\partial y_i}{\partial \mu_1}, \frac{\partial y_i}{\partial \mu_2}, \ldots$ stetige Funktionen der Veränderlichen x und der Parameter $\mu_1, \mu_2, \ldots$.

Im Anschluß an § 12 betrachten wir das System linearer Differentialgleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = A_1(x,\mu)\,y + B_1(x,\mu)\,z + C_1(x,\mu), \\ \dfrac{dz}{dx} = A_2(x,\mu)\,y + B_2(x,\mu)\,z + C_2(x,\mu), \end{cases}$$

dessen Koeffizienten

$$A_i(x,\mu), \quad B_i(x,\mu), \quad C_i(x,\mu) \qquad (i=1,2)$$

im Intervall $|x-a| \leqq h$ stetige Funktionen der reellen Veränderlichen x und ganze rationale Funktionen eines Parameters μ (der auch komplexe Werte annehmen kann) sind.

Ist eine beliebig große positive Größe $\mathfrak{r}$ gegeben, so läßt sich eine positive Größe K so angeben, daß für $|x-a| \leqq h$, $|\mu| \leqq \mathfrak{r}$

$$|A_i(x,\mu)| \leqq K, \quad |B_i(x,\mu)| \leqq K, \quad |C_i(x,\mu)| \leqq K \qquad (i=1,2)$$

ist. Um die dem System (6) genügenden Funktionen y, z zu bestimmen, welche für $x=a$ die beliebig vorgeschriebenen (von μ unabhängigen) Werte $y=b$, $z=c$ annehmen, wenden wir die Methode der schrittweisen Annäherung an, indem wir mit $y_0=b$, $z_0=c$ beginnen. Jetzt ist

$$y_n = \int_a^x [A_1(x,\mu)\,y_{n-1} + B_1(x,\mu)\,z_{n-1} + C_1(x,\mu)]\,dx$$

und demnach auch $y_n - y_{n-1}$ eine ganze rationale Funktion von μ. Die Reihe

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}),$$

deren Glieder ganze rationale Funktionen von μ sind, ist für $|x-a| \leqq h$, $|\mu| \leqq \mathfrak{r}$ absolut und gleichmäßig konvergent; sie stellt also eine analytische Funktion von μ dar, welche sich für $|\mu| \leqq \mathfrak{r}$ regulär verhält; sie ist, da $\mathfrak{r}$ beliebig groß angenommen werden kann, eine ganze transzendente Funktion von μ (sie kann in eine beständig konvergente Potenzreihe von μ entwickelt werden).

Dieser Satz überträgt sich auf ein System linearer Differentialgleichungen mit n abhängigen Veränderlichen und demnach auch auf eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

Die Koeffizienten $P_i(x,\mu)$ $(i=1,\ldots,n)$ der linearen Differentialgleichung

$$(7)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x,\mu)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x,\mu)\frac{dy}{dx} + P_n(x,\mu)\,y = 0$$

seien stetige Funktionen der reellen Veränderlichen x in dem Intervall $|x-a| \leqq h$ und ganze rationale Funktionen des Parameters μ. Eine Lösung y, welche für $x=a$ die von μ unabhängigen Werte $y=b, y'=b', \ldots, y^{(n-1)}=b^{(n-1)}$ annimmt, ist eine im Intervall $|x-a| \leqq h$ stetige Funktion von x und eine ganze transzendente Funktion von μ. (Vgl. das Beipsiel in § 31.)

§ 47. Abhängigkeit der Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung von den Anfangswerten.

Diejenige Funktion y, welche der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

genügt und für $x = a$ den Wert $y = b$ annimmt, kann als Funktion der Veränderlichen x und der Anfangswerte a, b betrachtet werden:

$$(8) \qquad y = \varphi(x, a, b).$$

Um die Abhängigkeit dieser Funktion von a und b und ihre Differentiierbarkeit nach a und b zu untersuchen, nehmen wir an, daß die Funktion $f(x, y)$ partielle Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

besitzt, die in der Umgebung von $x = a$, $y = b$ stetig sind.

Die Funktion $y = \varphi(x, a + \Delta a, b + \Delta b)$ genügt ebenfalls der Differentialgleichung (A); wenn man

$$x = \xi + \Delta a, \quad y = \eta + \Delta b$$

setzt, so gilt die Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f(\xi + \Delta a, \ \eta + \Delta b)$$

mit den Anfangsbedingungen $\xi = a$, $\eta = b$. Die partiellen Ableitungen von $f(\xi + \Delta a, \eta + \Delta b)$ nach den in der letzten Differentialgleichung enthaltenen Parametern Δa und Δb sind die als stetig vorausgesetzten partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ nach x und y. Demnach ist η eine stetige Funktion der Parameter Δa und Δb mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung nach diesen Parametern, und zwar gilt dies in der Umgebung von $\Delta a = 0, \Delta b = 0$. Mit anderen Worten, $y = \varphi(x, a + \Delta a, b + \Delta b)$ ist in der Umgebung von $\Delta a = 0$, $\Delta b = 0$ eine stetige Funktion von $\Delta a, \Delta b$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung nach Δa und Δb, oder $y = \varphi(x, a, b)$ ist eine stetige Funktion von a, b mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung nach a und b.

Wir haben den Satz:

Die Lösung $y = \varphi(x, a, b)$ der Differentialgleichung (A), welche für $x = a$ den Wert $y = b$ annimmt, ist eine stetige Funktion von x, a, b mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung nach x, a, b, vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x, y)$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach x und y besitzt.

Die der Differentialgleichung (A) genügende Funktion $y = \varphi(x, a, b)$ nehme, wenn für x ein Wert X in der Nähe von a gesetzt wird, den Wert $y = Y$ an. Die Lösung der Differentialgleichung (A), welche für $x = X$ den Wert $y = Y$ annimmt, ist mit $y = \varphi(x, X, Y)$ zu bezeichnen; sie stimmt, da es nur eine solche Lösung gibt, mit $y = \varphi(x, a, b)$ überein, d. h. $x = a$, $y = b$ sind zusammengehörige Werte, so daß $b = \varphi(a, X, Y)$ ist. Nun ist aber X ein beliebiger Wert in der Umgebung von a, den wir auch mit x bezeichnen können, wenn wir gleichzeitig Y durch y ersetzen. Es besteht also die Gleichung

$$b = \varphi(a, x, y), \tag{9}$$

die als Auflösung der Gleichung $y = \varphi(x, a, b)$ nach b zu betrachten ist.

Für $x = a$ hat man, wenn $y = \varphi(x, a, b)$ ist,

$$\frac{\partial y}{\partial b} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial a} = -f(a, b). \tag{10}$$

Denn wenn b um Δb wächst, geht $y = \varphi(x, a, b)$ in die Lösung $y + \Delta y = \varphi(x, a, b + \Delta b)$ über, welche für $x = a$ den Wert $b + \Delta b$ annimmt. Die Funktion $y + \Delta y - \Delta b$ nimmt für $x = a$ den Wert b an; sie genügt, da

$$\frac{d(y + \Delta y - \Delta b)}{dx} = \frac{d(y + \Delta y)}{dx} = f(x, y + \Delta y)$$
$$= f(x, y + \Delta y - \Delta b) + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y - \Delta b)]$$

ist, der Differentialgleichung (A) bis auf den Fehler

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y - \Delta b),$$

dessen absoluter Betrag der Lipschitzschen Bedingung zufolge höchstens gleich $K|\Delta b|$ ist. Nach § 11, Formel (11) ergibt sich eine obere Schranke für den absoluten Betrag der Differenz $(y + \Delta y - \Delta b) - y = \Delta y - \Delta b$ der beiden Funktionen $y + \Delta y - \Delta b$ und y, welche für $x = a$ denselben Wert b annehmen:

$$|\Delta y - \Delta b| \leqq |\Delta b| (e^{K|x-a|} - 1).$$

Es ist also

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta b} - 1 \right| \leqq e^{K|x-a|} - 1;$$

hieraus folgt für $\Delta b \to 0$

$$\left| \frac{\partial y}{\partial b} - 1 \right| \leqq e^{K|x-a|} - 1,$$

so daß für $x = a$ $\dfrac{\partial y}{\partial b} = 1$ ist.

Wenn man die Gleichung (9)

$$b = \varphi(a, x, y)$$

nach a differentiiert und dabei berücksichtigt, daß $y = \varphi(x, a, b)$ von a abhängt, erhält man die Gleichung

$$0 = \frac{\partial \varphi(a, x, y)}{\partial a} + \frac{\partial \varphi(a, x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a}. \tag{11}$$

Es ist

$$\frac{\partial \varphi(x, a, b)}{\partial x} = f(x, y),$$

also

$$\frac{\partial \varphi(a, x, y)}{\partial a} = f(a, b);$$

für $x = a$ ist

$$\frac{\partial \varphi(x, a, b)}{\partial b} = 1,$$

also ist auch für $x = a$

$$\frac{\partial \varphi(a, x, y)}{\partial y} = 1.$$

Wenn man in der Gleichung (11) $x = a$ setzt, sieht man, daß für $x = a$ $\dfrac{\partial y}{\partial a} = -f(a, b)$ ist.

§ 48. Übertragung auf ein Differentialgleichungssystem.

Die bisherige Untersuchung über die Abhängigkeit der Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung von den Anfangswerten läßt sich auf ein System von Differentialgleichungen übertragen, so daß wir den folgenden Satz aussprechen können:

In dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{B}$$

seien die Funktionen f_i nebst den Ableitungen $\dfrac{\partial f_i}{\partial x}, \dfrac{\partial f_i}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial f_i}{\partial y_n}$ in einem gewissen Gebiet der Veränderlichen $x, y_1, \ldots, y_n$ stetig. Die den Differentialgleichungen (B) genügenden Funktionen

$$y_i = \varphi_i(x, a, b_1, \ldots, b_n) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

welche für $x = a$ die Werte $y_1 = b_1, \ldots, y_n = b_n$ annehmen, sind stetige Funktionen der Argumente $x, a, b_1, \ldots, b_n$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung nach diesen sämtlichen Argumenten.

Wie in § 47 findet man, daß, wenn $y_i = \varphi_i(x, a, b_1, \ldots, b_n)$ ist, für $x = a$

$$(13)\qquad \frac{\partial y_i}{\partial b_i} = 1, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial b_k} = 0 \quad (i \neq k), \qquad \frac{\partial y_i}{\partial a} = -f(a, b_1, \ldots, b_n)$$

ist.

Ferner ergibt sich wie in § 47, daß sich die Gleichungen (12) in der Form schreiben lassen:

$$b_i = \varphi_i(a, x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Wir setzen

$$(14)\qquad \varphi_i(a, x, y_1, \ldots, y_n) = F_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, \ldots, n);$$

dann ist F_i eine stetige Funktion von $x, y_1, \ldots, y_n$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung. Die durch die Anfangsbedingung $x = a$, $y_1 = b_1, \ldots, y_n = b_n$ bestimmte Lösung (12) des Differentialgleichungssystems (B) erfüllt die n Gleichungen

$$(15)\qquad F_i(x, y_1, \ldots, y_n) = b_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Mit anderen Worten, die Funktion $F_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ nimmt einen konstanten (von x unabhängigen) Wert b_i an, wenn man für $y_1, \ldots, y_n$ die Funktionen (12) einsetzt, welche dem System (B) genügen und für $x = a$ die Werte $b_1, \ldots, b_n$ annehmen.

Für $x = a$ ist

$$\frac{\partial \varphi_i(x, a, b_1, \ldots, b_n)}{\partial b_k} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases};$$

durch Änderung der Bezeichnung ergibt sich, daß für $x = a$

$$\frac{\partial \varphi_i(a, x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_k} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

ist. Demnach nimmt die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial (F_1, \ldots, F_n)}{\partial (y_1, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

für $x = a$ den Wert 1 an, verschwindet also nicht identisch.

Eine Funktion $F(x, y_1, \ldots, y_n)$, welche einen konstanten Wert annimmt, wenn man für $y_1, \ldots, y_n$ eine beliebige Lösung des Systems (B) einsetzt, heißt ein erstes Integral oder kurz ein Integral von (B). Wir haben also das Vorhandensein von n unabhängigen ersten Integralen $F_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ des Systems (B) nachgewiesen.

§ 49. Die einem Differentialgleichungssystem zugeordnete lineare partielle Differentialgleichung.

Das Differentialgleichungssystem (B) steht in engem Zusammenhang mit der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(C) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial F}{\partial y_1} + \cdots + f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial F}{\partial y_n} = 0.$$

Unter einer Lösung $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ dieser partiellen Differentialgleichung wird eine Funktion der $n+1$ unabhängigen Veränderlichen $x, y_1, \ldots, y_n$ verstanden, welche die Gleichung (C) identisch befriedigt.

Ist $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (C) und $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems (B), so ist

$$F(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

konstant (von x unabhängig).

Es ist nämlich, wenn $y_1, \ldots, y_n$ den Differentialgleichungen (B) genügen,

$$\begin{aligned}\frac{dF(x, y_1, \ldots, y_n)}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} + f_1\frac{\partial F}{\partial y_1} + \cdots + f_n\frac{\partial F}{\partial y_n} = 0,\end{aligned}$$

also $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ von x unabhängig.

Die Funktion $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ der $n+1$ Veränderlichen $x, y_1, \ldots, y_n$ nehme einen von x unabhängigen Wert an, wenn für $y_1, \ldots, y_n$ eine beliebige Lösung des Systems (B) gesetzt wird. Dann genügt die Funktion F, wenn $x, y_1, \ldots, y_n$ als unabhängige Veränderliche betrachtet werden, der partiellen Differentialgleichung (C).

Sind $y_1, \ldots, y_n$ irgendwelche dem System (B) genügende Funktionen von x, so ist der Voraussetzung nach

$$\frac{dF(x, y_1, \ldots, y_n)}{dx} = 0$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+f_1\frac{\partial F}{\partial y_1}+\cdots+f_n\frac{\partial F}{\partial y_n}=0.$$

Die Gleichung (C) ist also zunächst erfüllt, wenn x beliebig gewählt wird, während die zugehörigen Werte von $y_1, \ldots, y_n$ aus einer Lösung von (B) berechnet werden. Ist aber $x=a$, $y_1=b_1, \ldots, y_n=b_n$ eine beliebige Stelle des Gebietes, in welchem die Funktionen f_i nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind, so sind dem System (B) genügende Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ vorhanden, welche für $x=a$ die Werte $y_1=b_1, \ldots, y_n=b_n$ annehmen. Die Gleichung (C), welche für das beliebige Wertsystem $x=a$, $y_1=b_1, \ldots, y_n=b_n$ erfüllt ist, ist also identisch erfüllt.

Wir können auch sagen: Ein Integral des Systems (B) in dem in § 48 angeführten Sinne ist eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (C). In § 48 haben wir gesehen, daß das System (B) die n Integrale (14)

$$F_i(x, y_1, \ldots, y_n)=\varphi_i(a, x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i=1, \ldots, n)$$

besitzt und daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}$$

nicht identisch verschwindet. Demnach sind $F_1, \ldots, F_n$ Lösungen der partiellen Differentialgleichung (C).

Besitzt die partielle Differentialgleichung (C) die n Lösungen $F_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, F_n(x, y_1, \ldots, y_n)$, so hat sie auch die Lösung

$$F=\Psi(F_1, \ldots, F_n), \tag{16}$$

wo Ψ eine willkürliche Funktion mit partiellen Ableitungen erster Ordnung bezeichnet.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}&=\frac{\partial \Psi}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial \Psi}{\partial F_n}\frac{\partial F_n}{\partial x},\\
\frac{\partial F}{\partial y_1}&=\frac{\partial \Psi}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\cdots+\frac{\partial \Psi}{\partial F_n}\frac{\partial F_n}{\partial y_1},\\
&\cdots\cdots\cdots

Da die Klammerausdrücke auf der rechten Seite verschwinden, so verschwindet auch die linke Seite, d. h. $F = \Psi(F_1, \ldots, F_n)$ genügt der Gleichung (C).

Da die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)},$$

wenn unter $F_1, \ldots, F_n$ die Funktionen (14) verstanden werden, in einem gewissen Gebiet der Veränderlichen $x, y_1, \ldots, y_n$ von Null verschieden ist, bestimmen die n Gleichungen

$$\begin{aligned} F_1(x, y_1, \ldots, y_n) &= F_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x, y_1, \ldots, y_n) &= F_n \end{aligned}$$

$y_1, \ldots, y_n$ als Funktionen von $x, F_1, \ldots, F_n$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung. Eine beliebige Lösung $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ der partiellen Differentialgleichung (C) läßt sich demnach als Funktion von $x, F_1, \ldots, F_n$ darstellen:

$$F(x, y_1, \ldots, y_n) = \Psi(x, F_1, \ldots, F_n).$$

Wir werden zeigen, daß

$$\frac{\partial \Psi(x, F_1, \ldots, F_n)}{\partial x} = 0$$

ist, daß also Ψ von x unabhängig ist und nur von $F_1, \ldots, F_n$ abhängt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial F_n}\frac{\partial F_n}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y_1} &= \frac{\partial \Psi}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial F_n}\frac{\partial F_n}{\partial y_1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_n} &= \frac{\partial \Psi}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial y_n} + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial F_n}\frac{\partial F_n}{\partial y_n}. \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + f_1\frac{\partial F}{\partial y_1} + \cdots + f_n\frac{\partial F}{\partial y_n} = 0$$

geht demnach in

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Psi}{\partial F_i}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x} + f_1\frac{\partial F_i}{\partial y_1} + \cdots + f_n\frac{\partial F_i}{\partial y_n}\right) = 0$$

über. Da die Klammerausdrücke verschwinden, so ist

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0,$$

w. z. b. w. Damit haben wir den Satz:

Die allgemeinste Lösung der partiellen Differentialgleichung (C) ist

$$F = \Psi(F_1, \ldots, F_n),$$

wo Ψ eine willkürliche (differentiierbare) Funktion bedeutet, während $F_1, \ldots, F_n$ die Funktionen (14) sind.

§ 50. Weitere Untersuchungen über Differentialgleichungen mit einem Parameter.

Die Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu)$$

mit der reellen unabhängigen Veränderlichen x, der abhängigen Veränderlichen y und dem Parameter μ besitze für $\mu = 0$ die Lösung $y = \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ eine in dem Intervall $a \leqq x \leqq a + h$ stetige Funktion darstellt. Die Funktion $f(x, y, \mu)$ sei für alle diesem Intervall angehörigen Werte von x in eine Potenzreihe von $y - \varphi(x)$ und μ entwickelbar, welche stetige Funktionen von x zu Koeffizienten hat. Wir betrachten die Lösung der Differentialgleichung (D), welche für $x = a$ den Wert $y = \varphi(a)$ annimmt, in ihrer Abhängigkeit von dem Parameter μ.

Setzt man $y = \varphi(x) + z$, so geht die Differentialgleichung (D) in

$$\text{(17)} \qquad \frac{dz}{dx} = F(x, z, \mu)$$

über; $F(x, z, \mu)$ sei in eine für $|z| \leqq H$, $|\mu| \leqq \mathfrak{r}$ konvergente Potenzreihe von z, μ entwickelbar, deren Koeffizienten für $a \leqq x \leqq a + h$ stetige Funktionen von x sind; die positiven Größen $H, \mathfrak{r}$ sind von x unabhängig. Da die Differentialgleichung (17) für $\mu = 0$ die Lösung $z = 0$ besitzt, so ist $F(x, 0, 0) = 0$. Es ist

$$F(x, z, \mu) - F(x, 0, 0) = \int_0^z \frac{\partial F(x, z, \mu)}{\partial z}\, dz + \int_0^\mu \frac{\partial F(x, 0, \mu)}{\partial \mu}\, d\mu,$$

also für $a \leqq x \leqq a + h$, $|z| \leqq H$, $|\mu| \leqq \mathfrak{r}$

$$|F(x, z, \mu)| \leqq K|z| + L|\mu|,$$

wo K und L endliche positive Größen sind, welche von den absoluten Beträgen von $\frac{\partial F}{\partial z}$ und $\frac{\partial F}{\partial \mu}$ nicht überschritten werden.

Die Differentialgleichung (17) integrieren wir vermittels schrittweiser Annäherung. Da für $x = a$ $z = 0$ sein soll, setzen wir, indem wir mit $z_0 = 0$ beginnen,

$$z_n = \int_a^x F(x, z_{n-1}, \mu)\, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Für $a \leqq x \leqq a + h$, $|\mu| \leqq \mathfrak{r}$ ist

$$|z_n| \leqq \int_a^x (K|z_{n-1}| + L|\mu|)\, dx,$$

falls $|z_{n-1}| \leqq H$ ist. Für $n = 1$ hat man wegen $z_0 = 0$

$$|z_1| \leqq L|\mu|(x - a) = \frac{L|\mu|}{K} \cdot \frac{K(x-a)}{1!}.$$

Durch den Schluß von $n - 1$ auf n ergibt sich

$$|z_n| \leqq \frac{L|\mu|}{K}\left(\frac{K^n(x-a)^n}{n!} + \cdots + \frac{K(x-a)}{1!}\right);$$

also ist

$$|z_n| \leqq \frac{L|\mu|}{K}(e^{K(x-a)} - 1) \leqq \frac{L|\mu|}{K}(e^{Kh} - 1) \leqq H,$$

wenn $|\mu|$ unter einer gewissen positiven Größe $\mathfrak{r}_0$ bleibt. Nun beweist man wie in § 11, daß die Reihe

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} (z_n - z_{n-1})$$

für $a \leqq x \leqq a + h$, $|\mu| \leqq \mathfrak{r}_0$ gleichmäßig konvergiert und der Differentialgleichung (17) genügt. Da die einzelnen Reihenglieder stetige Funktionen von x und Potenzreihen von μ sind, so läßt sich auch die Reihensumme z in eine Potenzreihe von μ entwickeln, welche für $|\mu| \leqq \mathfrak{r}_0$ konvergiert und deren Koeffizienten für $a \leqq x \leqq a + h$ stetig sind.

Die Lösung der Differentialgleichung (D), welche durch die Anfangsbedingung $x = a$, $y = \varphi(a)$ bestimmt ist, gestattet also eine für $|\mu| \leqq \mathfrak{r}_0$ und für $a \leqq x \leqq a + h$ konvergente Reihenentwicklung

$$y = y^{(0)} + \mu y^{(1)} + \mu^2 y^{(2)} + \cdots, \tag{18}$$

wo $y^{(0)} = \varphi(x)$ und $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots$ für $a \leqq x \leqq a + h$ stetige Funktionen von x sind.

Der bewiesene Satz überträgt sich ohne weiteres auf den Fall, daß die rechte Seite der Differentialgleichung (D) eine Potenzreihe $f(x, y, \mu_1, \mu_2, \ldots)$ mehrerer Parameter $\mu_1, \mu_2, \ldots$ ist.

Die Lösung der Differentialgleichung (D), welche die Anfangsbedingung $x = a$, $y = \varphi(a) + \alpha$ erfüllt, führt man durch die Substitution $y = \alpha + Y$

in die durch die Anfangsbedingung $x = a$, $Y = \varphi(a)$ bestimmte Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dY}{dx} = f(x, \alpha + Y, \mu)$$

über, deren rechte Seite in eine Potenzreihe von $Y - \varphi(x)$, μ, α entwickelbar ist. Nach dem bewiesenen Satze läßt sich Y und damit auch y in eine Potenzreihe von μ und α entwickeln, deren Koeffizienten für $a \leqq x \leqq a + h$ stetige Funktionen von x sind.

Die Übertragung dieses Satzes auf ein System von n Differentialgleichungen mit n Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ der Veränderlichen x bietet keine Schwierigkeiten. Wir sprechen den allgemeinen Satz ohne Beweis aus:

Das Differentialgleichungssystem

$$\text{(E)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

habe für $\mu = 0$ die in dem Intervall $a \leqq x \leqq a + h$ der reellen Veränderlichen x stetige Lösung

$$y_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Die Funktionen f_i seien für alle x-Werte dieses Intervalls in Potenzreihen von $y_1 - \varphi_1(x), \ldots, y_n - \varphi_n(x), \mu$ entwickelbar, welche stetige Funktionen von x zu Koeffizienten haben. Die dem System (E) genügenden Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ von x, welche für $x = a$ die Werte $y_1 = \varphi_1(a) + \alpha_1, \ldots, y_n = \varphi_n(a) + \alpha_n$ annehmen, lassen sich in Potenzreihen von $\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ entwickeln, welche für hinreichend kleine absolute Beträge dieser $n + 1$ Größen konvergieren und deren Koeffizienten für $a \leqq x \leqq a + h$ stetige Funktionen von x sind.

Wir behandeln einen besonderen Fall. In dem Differentialgleichungssystem ohne Parameter

$$(19) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

sei f_i in eine Potenzreihe von $y_1, \ldots, y_n$ ohne konstantes Glied entwickelbar. Wir nehmen $\varphi_i(x) \equiv 0$ an und verstehen unter $a \leqq x \leqq a + h$ ein beliebiges Intervall. Die dem System (19) genügenden Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ von x, welche die Anfangsbedingung $x = a$, $y_1 = \alpha_1, \ldots, y_n = \alpha_n$ erfüllen, sind in Potenzreihen von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ entwickelbar, welche im Intervall $a \leqq x \leqq a + h$ stetige Funktionen von x zu Koeffizienten haben und für hinreichend kleine Werte von $|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|$ konvergieren.

Beispiel. Die Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung

$$(20) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + x = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

welche die Anfangsbedingung $t = 0,\ x = c,\ \frac{dx}{dt} = 0$ erfüllt, läßt sich in eine Potenzreihe der kleinen Größe c entwickeln, deren Koeffizienten Funktionen von t sind:

$$x = c\varphi_1(t) + c^2\varphi_2(t) + c^3\varphi_3(t) + \cdots;$$
$$\varphi_1 = \cos t,$$
$$\varphi_2 = \tfrac{1}{6}a_2(3 - 2\cos t - \cos 2t),$$
$$\varphi_3 = -\tfrac{1}{3}a_2^2 + (\tfrac{29}{144}a_2^2 + \tfrac{1}{32}a_3)\cos t + \tfrac{1}{9}a_2^2\cos 2t + (\tfrac{1}{48}a_2^2 - \tfrac{1}{32}a_3)\cos 3t + (\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3)\,t\sin t,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Man zeige, daß diese Lösung die Periode

$$T = 2\pi[1 + (\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3)c^2 + \cdots]$$

besitzt. Man führe die unabhängige Veränderliche $u = \frac{2\pi t}{T}$ ein und stelle die verlangte Lösung x als Potenzreihe von c dar, deren Koeffizienten periodische Funktionen von u mit der Periode 2π sind. Es ergibt sich

$$x = c\psi_1(u) + c^2\psi_2(u) + c^3\psi_3(u) + \cdots;$$
$$\psi_1 = \cos u,$$
$$\psi_2 = \tfrac{1}{6}a_2(3 - 2\cos u - \cos 2u),$$
$$\psi_3 = -\tfrac{1}{3}a_2^2 + (\tfrac{29}{144}a_2^2 + \tfrac{1}{32}a_3)\cos u + \tfrac{1}{9}a_2^2\cos 2u + (\tfrac{1}{48}a_2^2 - \tfrac{1}{32}a_3)\cos 3u,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Funktionen $\varphi_3, \ldots$ enthalten sogenannte säkulare Glieder, in welchen t außerhalb der trigonometrischen Funktionen vorkommt, die Funktionen ψ nur periodische Glieder.

Man kann übrigens auch die Differentialgleichung (20) mit der angegebenen Anfangsbedingung zunächst durch die Differentialgleichung erster Ordnung ersetzen:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = c^2 - x^2 + \tfrac{2}{3}a_2(x^3 - c^3) + \tfrac{3}{4}a_3(x^4 - c^4) + \cdots.$$

(Vgl. Horn, Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. 47 u. 49).

§ 51. Periodische Lösungen eines Differentialgleichungssystems mit einem Parameter. Erster Fall.

In dem Differentialgleichungssystem

$$(F) \qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit dem Parameter μ sei f_i eine periodische Funktion von t mit der Periode T. Wir nehmen an, das System (F) besitze für $\mu = 0$ eine periodische Lösung

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit der Periode T; es sei also $\varphi_i(t)$ eine für alle reellen Werte von t stetige Funktion, welche die Bedingung $\varphi_i(t + T) = \varphi_i(t)$ erfüllt. Wir setzen weiter voraus, daß sich f_i für alle reellen Werte von t in eine Potenzreihe von $x_1 - \varphi_1(t), \ldots, x_n - \varphi_n(t), \mu$ entwickeln läßt, deren Koeffizienten stetige Funktionen von t (mit der Periode T) sind. Wir fragen, ob das System (F) auch für kleine Werte von μ periodische Lösungen mit der Periode T besitzt.

Die Funktionen x_i, welche dem System (F) genügen und für $t = 0$ die Werte $x_i = \varphi_i(0) + \alpha_i$ annehmen, lassen sich nach § 50 in Potenzreihen von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu$ entwickeln, welche konvergieren, wenn die absoluten Beträge dieser $n + 1$ Größen hinreichend klein sind, und welche im Intervall $t = 0 \ldots T$ stetige Funktionen von t zu Koeffizienten haben. Wir schreiben

$$x_i = g_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{21}$$

oder bisweilen auch kürzer $x_i = g_i(t)$ und beachten, daß

$$\begin{cases} g_i(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu) = \varphi_i(0) + \alpha_i, \\ g_i(t, 0, \ldots, 0, 0) = \varphi_i(t) \end{cases} \tag{22}$$

ist.

Die Lösung (21) des Systems (F) besitzt dann und nur dann die Periode T, wenn

$$\psi_i = g_i(T, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu) - g_i(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{23}$$

ist. Zunächst sind die Bedingungen (23) notwendig für die Periodizität. Daß sie auch hinreichend sind, erkennt man, indem man das System (F) durch die Substitution $t = T + \mathfrak{t}$ in

$$\frac{dx_i}{d\mathfrak{t}} = f_i(T + \mathfrak{t}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu) = f_i(\mathfrak{t}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu)$$

überführt. Die Lösung (21) des Systems (F) geht in diejenige Lösung des transformierten Systems über, welche für $\mathfrak{t} = 0$ (d. i. für $t = T$) die Werte $x_i = g_i(T)$ oder infolge der Bedingungen (23) die Werte $x_i = g_i(0) = \varphi_i(0) + \alpha_i$ annimmt. Da aber die letztere Lösung durch die Anfangsbedingungen bestimmt ist und da das transformierte System mit dem ursprünglichen übereinstimmt (abgesehen davon, daß t durch $\mathfrak{t}$ ersetzt ist), so nimmt die Lösung (21) für den Wert $t = T + \mathfrak{t}$ denselben Wert an wie für den Wert $\mathfrak{t}$, d. h. sie besitzt die Periode T.

Die Funktion ψ reduziert sich für $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0, \mu = 0$ auf $\varphi_i(T) - \varphi_i(0) = 0$, sie läßt sich daher in eine Potenzreihe von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu$ entwickeln, welche verschwindet, wenn alle Argumente verschwinden. Wir schreiben die linearen Glieder an:

$$\psi_i = A_{i1}\alpha_1 + \cdots + A_{in}\alpha_n + B_i\mu + \cdots. \tag{24}$$

Wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11}, & \ldots, & A_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{n1}, & \ldots, & A_{nn} \end{vmatrix} \tag{25}$$

von Null verschieden ist, sind die n Periodizitätsbedingungen $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_n = 0$ voneinander unabhängig und liefern $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ als Potenzreihen von μ, welche konvergieren, wenn $|\mu|$ hinreichend klein ist. Nach Einsetzung der für die α_i gefundenen Werte ist $x_i = g_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu)$ eine periodische Funktion von t mit der Periode T. Die Funktion x_i läßt sich als Potenzreihe von μ darstellen, welche für kleine Werte von $|\mu|$ konvergiert und periodische Funktionen von t mit der Periode T zu Koeffizienten hat.

Die n Gleichungen $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_n = 0$ sind nicht unabhängig voneinander, wenn das Differentialgleichungssystem (F) ein Integral

$$F(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) = \text{const}. \tag{26}$$

besitzt, wo F eine periodische Funktion von t mit der Periode T darstellt und auch im übrigen denselben Charakter hat wie vorhin die Funktionen f_i. Dann ist nämlich, weil $F(t, x_1, \ldots, x_n, \mu)$ nach Einsetzung einer Lösung des Systems (F) von t unabhängig ist,

$$F(0, g_1(0), \ldots, \mu) = F(T, g_1(T), \ldots, \mu);$$

ferner ist wegen der Periodizität der Funktion F von t

$$F(T, g_1(T), \ldots, \mu) = F(0, g_1(T), \ldots, \mu);$$

also hat man

$$F(0, g_1(T), \ldots, \mu) - F(0, g_1(0), \ldots, \mu) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung läßt sich nach Potenzen von

$$\psi_1 = g_1(T) - g_1(0), \ldots, \alpha_1, \ldots, \mu$$

entwickeln und verschwindet, wenn $\psi_1, \ldots, \psi_n$ gleichzeitig verschwinden. Wir schreiben

$$c_1\psi_1 + \cdots + c_n\psi_n + \cdots = 0,$$

wo die weggelassenen Glieder von höherem als dem ersten Grad in bezug auf $\psi_1, \ldots, \psi_n, \mu$ sind. Wir nehmen an, c_n oder, was dasselbe ist, der

Wert von $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ für $t = 0$, $x_1 = \varphi_1(0), \ldots, \mu = 0$ sei von Null verschieden. Dann ist die Gleichung $\psi_n = 0$ eine Folge der Gleichungen $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_{n-1} = 0$, aus welchen man $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ als Potenzreihen von α_n und μ berechnet, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11}, & \ldots, A_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ A_{n-1,1} & \ldots, A_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \tag{27}$$

nicht verschwindet.

§ 52. Periodische Lösungen eines Differentialgleichungssystems mit einem Parameter. Zweiter Fall.

Wir betrachten jetzt das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{G}$$

wo die von t nicht abhängige Funktion f_i in eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$ und μ entwickelbar ist. Wir nehmen an, das System (G) besitze für $\mu = 0$ eine periodische Lösung mit der Periode T:

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Wir fragen, ob auch für kleine Werte von μ periodische Lösungen vorhanden sind. In § 51, wo f_i eine periodische Funktion von t mit der Periode T war, mußte eine periodische Lösung von (G) ebenfalls die Periode T besitzen; jetzt, wo f_i von t unabhängig ist, ist die Periode einer etwaigen periodischen Lösung nicht von vornherein bestimmt, wir setzen die Periode gleich $T + \tau$, wo τ eine kleine Größe darstellen soll.

Die dem System (G) genügenden Funktionen x_i, welche für $t = 0$ die Werte $\varphi_i(0) + \alpha_i$ annehmen, lassen sich nach § 50 in Potenzreihen von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu$ entwickeln, deren Koeffizienten, weil f_i analytisch ist, analytische Funktionen von t sind:

$$x_i = g_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu), \tag{28}$$

wofür wir wie oben gelegentlich auch $x_i = g_i(t)$ schreiben. Die Funktionen x_i besitzen dann und nur dann die Periode $T + \tau$, wenn

$$\psi_i = g_i(T + \tau, \alpha_1, \ldots, \mu) - g_i(0, \alpha_1, \ldots, \mu) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{29}$$

ist Da $g_i(t)$ eine analytische Funktion von t ist, läßt sich ψ_i in eine Potenzreihe der $n + 2$ kleinen Größen $\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu$ entwickeln, welche kein von diesen $n + 2$ Größen freies Glied enthält. Die letzte Behauptung folgt daraus, daß sich für $\tau = \alpha_1 = \cdots = \mu = 0$ ψ_i auf

$$g_i(T, 0, \ldots, 0) - g_i(0, 0, \ldots, 0) = \varphi_i(T) - \varphi_i(0) = 0$$

reduziert.

Ist $x_i = g_i(t)$ eine Lösung des Systems (G), so ist $x_i = g_i(t + h)$, wo h eine willkürliche Konstante darstellt, ebenfalls eine Lösung. Man kann daher den Nullwert der unabhängigen Veränderlichen t so wählen, daß z. B. $\alpha_n = 0$ wird, so daß ψ_i als Potenzreihe der $n + 1$ Argumente $\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \mu$ erscheint. Ist die Determinante der Koeffizienten von $\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ in den Potenzreihenentwicklungen von $\psi_1, \ldots, \psi_n$ von Null verschieden, so lassen sich $\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ als Potenzreihen von μ darstellen. Es ist also für jeden hinreichend kleinen Wert des Parameters μ eine periodische Lösung x_i des Systems (G) vorhanden, deren Periode $T + \tau$ eine Potenzreihe von μ ist, welche sich für $\mu = 0$ auf T reduziert. In dieser periodischen Lösung darf t um eine Konstante vermehrt werden.

Wenn das System (G) ein Integral

$$F(x_1, \ldots, x_n, \mu) = \text{const.} \tag{30}$$

besitzt, hat man ähnlich wie in § 51

$$F[g_1(T + \tau), \ldots, g_n(T + \tau), \mu] - F[g_1(0), \ldots, g_n(0), \mu] = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung läßt sich in eine Potenzreihe von $\psi_1, \ldots, \psi_n, \tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu$ entwickeln, welche gleichzeitig mit $\psi_1, \ldots, \psi_n$ verschwindet; wir schreiben die Gleichung unter Beschränkung auf die linearen Glieder

$$c_1\psi_1 + \cdots + c_n\psi_n + \cdots = 0.$$

Wenn c_n, d. i. der Wert von $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}$ für $x_1 = \varphi_1(0), \ldots, x_n = \varphi_n(0), \mu = 0$, nicht verschwindet, haben die $n - 1$ Gleichungen $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_{n-1} = 0$ die Gleichung $\psi_n = 0$ zur Folge. Setzt man wieder $\alpha_n = 0$ und ist die Determinante der Koeffizienten von $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ in den Potenzreihenentwicklungen von $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ von Null verschieden, so ergeben sich $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ als Potenzreihen der kleinen Größen τ und μ. Setzt man insbesondere $\tau = 0$, so hat man für kleine Werte von μ eine periodische Lösung mit der Periode T[1]).

[1]) Die in § 51 und § 52 dargestellte Methode zur Aufsuchung periodischer Lösungen ist von Poincaré entwickelt und auf das Problem der drei Körper angewandt worden. Vgl. Charlier, Mechanik des Himmels, Bd. II, 9. Abschnitt.

Neuntes Kapitel.

Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen.

§ 53. Die einfachsten Singularitäten einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir schreiben eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen x, y in der Form

$$\text{(A)} \qquad \frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)},$$

wo X, Y als analytische Funktionen der Veränderlichen x, y vorausgesetzt werden, welche sich in der Umgebung der Stelle $x = a$, $y = b$ regulär verhalten, also in Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ entwickelbar sind. Ist für $x = a$, $y = b$ die Funktion $X(x, y)$ von Null verschieden, so verhält sich die Funktion

$$\frac{Y(x, y)}{X(x, y)} = f(x, y)$$

bei $x = a$, $y = b$ regulär, und die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

wird nach § 32 durch eine einzige Funktion y von x befriedigt, welche für $x = a$ den Wert $y = b$ annimmt und in der Umgebung von $x = a$ regulär ist, also in eine Potenzreihe von $x - a$ entwickelt werden kann. Verschwindet X für $x = a$, $y = b$, ist aber Y an dieser Stelle von Null verschieden, so stellt man x als Funktion von y dar.

Mit Rücksicht auf § 32 und § 34 können wir also den Satz aussprechen:

Durch einen Punkt $x = a$, $y = b$, in welchem die Funktionen X, Y nicht gleichzeitig verschwinden, geht nur eine Integralkurve der Differentialgleichung (A).

Ein Punkt $x = a$, $y = b$, in welchem die beiden Funktionen X, Y verschwinden, wird als singulärer Punkt der Differentialgleichung (A) bezeichnet. Wir nehmen an,

$$x = 0, \qquad y = 0$$

sei ein singulärer Punkt, in dessen Umgebung die Potenzreihenentwicklungen

$$(1) \qquad \begin{cases} X = a_1 x + b_1 y + \cdots, \\ Y = a_2 x + b_2 y + \cdots \end{cases}$$

bestehen, wo die weggelassenen Glieder von mindestens dem zweiten Grad in x, y sind. Die Funktionen X, Y dürfen mit derselben Konstanten multipliziert werden. Wir nehmen an, daß die Determinante $a_1 b_2 - a_2 b_1$ nicht verschwindet.

Die Differentialgleichung (A) geht durch die lineare Substitution

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi = h_1 x + k_1 y, \\ \eta = h_2 x + k_2 y \end{cases}$$

in

$$(3) \qquad \frac{d\xi}{\Xi} = \frac{d\eta}{\mathsf{H}}$$

über, wo

$$\Xi = h_1 X + k_1 Y,$$
$$\mathsf{H} = h_2 X + k_2 Y$$

ist. Wir suchen die Koeffizienten der Substitution (2) so zu bestimmen, daß Ξ nur das eine lineare Glied $\lambda_1 \xi$, H nur das eine lineare Glied $\lambda_2 \eta$ enthält. Dann müssen die Gleichungen bestehen:

$$h_1(a_1 x + b_1 y) + k_1(a_2 x + b_2 y) = \lambda_1(h_1 x + k_1 y),$$
$$h_2(a_1 x + b_1 y) + k_2(a_2 x + b_2 y) = \lambda_2(h_2 x + k_2 y).$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von x bzw. y erhält man die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} h_1(a_1 - \lambda_1) + k_1 a_2 = 0, \\ h_1 b_1 + k_1(b_2 - \lambda_1) = 0 \end{cases}$$

und

$$(5) \qquad \begin{cases} h_2(a_1 - \lambda_2) + k_2 a_2 = 0, \\ h_2 b_1 + k_2(b_2 - \lambda_2) = 0. \end{cases}$$

Demnach müssen λ_1 und λ_2 der quadratischen Gleichung mit der Unbekannten λ

$$(6) \qquad f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda, & b_1 \\ a_2 & , \; b_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

genügen. Hat diese Gleichung zwei verschiedene Wurzeln λ_1, λ_2, so hat das durch die Gleichungen (4) bestimmte Verhältnis $h_1 : k_1$ einen anderen

Wert als das durch die Gleichungen (5) bestimmte Verhältnis $h_2 : k_2$; die Determinante

$$\begin{vmatrix} h_1, & k_1 \\ h_2, & k_2 \end{vmatrix}$$

ist also von Null verschieden. Nunmehr ist

$$\Xi = \lambda_1 \xi + \cdots, \quad \mathsf{H} = \lambda_2 \eta + \cdots, \tag{7}$$

wo die weggelassenen Glieder vom zweiten und von höherem Grad in ξ, η sind.

Hat die quadratische Gleichung (6) die Doppelwurzel λ_0, so sind zwei Fälle möglich.

Es kann erstens $a_1 = b_2 = \lambda_0$, $a_2 = b_1 = 0$ sein. Dann ist $X = \lambda_0 x + \cdots$, $Y = \lambda_0 y + \cdots$ und bei beliebiger Wahl der Koeffizienten der Substitution (2) $\Xi = \lambda_0 \xi + \cdots$, $\mathsf{H} = \lambda_0 \eta + \cdots$.

Andernfalls machen wir

$$\Xi = \lambda_0 \xi + \cdots, \quad \mathsf{H} = \lambda_0 \eta + \xi + \cdots. \tag{8}$$

Dann müssen die beiden identischen Gleichungen bestehen:

$$h_1(a_1 x + b_1 y) + k_1(a_2 x + b_2 y) = \lambda_0(h_1 x + k_1 y),$$
$$h_2(a_1 x + b_1 y) + k_2(a_2 x + b_2 y) = \lambda_0(h_2 x + k_2 y) + h_1 x + k_1 y.$$

Aus der ersten folgt

$$\begin{cases} h_1(a_1 - \lambda_0) + k_1 a_2 = 0, \\ h_1 b_1 + k_1(b_2 - \lambda_0) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

und aus der zweiten

$$\begin{cases} h_2(a_1 - \lambda_0) + k_2 a_2 = h_1, \\ h_2 b_1 + k_2(b_2 - \lambda_0) = k_1. \end{cases} \tag{10}$$

Aus den Gleichungen (9) erhält man

$$h_1 : k_1 = a_2 : \lambda_0 - a_1 = \lambda_0 - b_2 : b_1.$$

Die Doppelwurzel λ_0 der Gleichung $f(\lambda) = 0$ genügt der Gleichung

$$f'(\lambda_0) = 2\lambda_0 - (a_1 + b_2) = 0.$$

Wenn man die erste Gleichung (10) mit $-b_1$, die zweite mit $a_1 - \lambda_0$ multipliziert und addiert, ergibt sich

$$0 \cdot h_2 + 0 \cdot k_2 = -b_1 h_1 + (a_1 - \lambda_0) k_1;$$

die rechte Seite wird, wenn man $h_1 = \lambda_0 - b_2$, $k_1 = b_1$ setzt, gleich

$$b_1(a_1 + b_2 - 2\lambda_0) = 0$$

wegen $f'(\lambda_0) = 0$. Es ist die eine der beiden Gleichungen (10) eine Folge der anderen. Man kann die eine der beiden Größen h_2, k_2 durch die beliebig zu wählende andere ausdrücken, nachdem h_1, k_1 festgelegt sind.

Demnach läßt sich die Differentialgleichung (A) auf die Form (3)

$$\frac{d\xi}{\Xi(\xi,\eta)} = \frac{d\eta}{\mathsf{H}(\xi,\eta)}$$

bringen, wo entweder (7)

$$\Xi = \lambda_1\xi + \cdots, \quad \mathsf{H} = \lambda_2\eta + \cdots$$

oder (8)

$$\Xi = \lambda_0\xi + \cdots, \quad \mathsf{H} = \lambda_0\eta + \xi + \cdots$$

ist. Im ersten Falle kann $\lambda_1 \neq \lambda_2$ oder $\lambda_1 = \lambda_2$ sein.

Wir können also der weiteren Betrachtung, indem wir die neuen Veränderlichen wieder mit x, y bezeichnen, die Differentialgleichung (A) zugrunde legen, worin

$$X = \lambda_1 x + \cdots, \quad Y = \lambda_2 y + \cdots \tag{11}$$

Potenzreihen von x, y sind, welche für $x = 0, y = 0$ verschwinden und von denen nur die linearen Glieder angeschrieben sind; λ_1, λ_2 sind nicht notwendig voneinander verschieden. Ausnahmsweise haben wir

$$X = \lambda_0 x + \cdots, \quad Y = \lambda_0 y + x + \cdots. \tag{12}$$

Wir nehmen an, daß die Konstanten λ_1, λ_2 bzw. λ_0 von Null verschieden sind.

Unter Einführung einer Hilfsveränderlichen t geben wir der Differentialgleichung (A) die Form

$$t\frac{dx}{dt} = X, \quad t\frac{dy}{dt} = Y \tag{13}$$

und suchen Integralkurven, welche in der Nähe des singulären Punktes $x = 0, y = 0$ verlaufen, dadurch analytisch darzustellen, daß wir vermittels konvergenter Reihenentwicklungen x, y als Funktionen von t ausdrücken.

§ 54. Reihenentwicklung der Lösungen von Differentialgleichungssystemen in der Umgebung singulärer Stellen.

In dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} = \lambda_1 x + \varphi_1(x, y), \\ t\dfrac{dy}{dt} = \lambda_2 y + \varphi_2(x, y) \end{cases} \tag{14}$$

seien $\varphi_i (i = 1, 2)$ Potenzreihen von x, y, welche mit Gliedern zweiter Dimension beginnen. Wir nehmen an, daß die reellen Teile von λ_1 und λ_2 positiv sind und daß keiner der Quotienten $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ eine von 1 verschiedene ganze positive Zahl ist. Dann lassen sich, wenn wir zwei willkürliche Konstante C_1, C_2 einführen, x, y als Potenzreihen der beiden Argumente

$$u = C_1 t^{\lambda_1}, \quad v = C_2 t^{\lambda_2} \tag{15}$$

darstellen, welche konvergieren, wenn die absoluten Beträge dieser Argumente hinreichend klein sind,

Um diese Behauptung zu beweisen, geben wir dem System (14) die Form

$$\begin{cases} \lambda_1 u \dfrac{\partial x}{\partial u} + \lambda_2 v \dfrac{\partial x}{\partial v} = \lambda_1 x + \varphi_1(x, y), \\ \lambda_1 u \dfrac{\partial y}{\partial u} + \lambda_2 v \dfrac{\partial y}{\partial v} = \lambda_2 y + \varphi_2(x, y), \end{cases} \tag{16}$$

worin

$$\varphi_i(x, y) = \sum A^{(i)}_{k_1, k_2} x^{k_1} y^{k_2} \qquad (k_1 + k_2 \geqq 2)$$

eine für $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r$ konvergente Potenzreihe sein möge. Wir suchen die Differentialgleichungen (16) durch Potenzreihen von u, v

$$x = \sum C^{(1)}_{p_1, p_2} u^{p_1} v^{p_2}, \quad y = \sum C^{(2)}_{p_1, p_2} u^{p_1} v^{p_2} \qquad (p_1 + p_2 \geqq 1) \tag{17}$$

zu befriedigen, welche für $u = 0$, $v = 0$ verschwinden.

Die Einsetzung der Reihen (17) in die Differentialgleichungen (16) ergibt die Rekursionsformeln

$$(p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 - \lambda_i) C^{(i)}_{p_1, p_2} = \cdots; \tag{18}$$

jedes Glied der rechten Seite ist ein Produkt aus einer Größe $A^{(i)}_{k_1, k_2}$ und zwei oder mehreren Größen $C^{(i')}_{p_1', p_2'}$, wo i' eine der Zahlen 1, 2 ist, während p_1', p_2' ganze positive Zahlen (einschließlich Null) sind, welche die Bedingungen erfüllen:

$$p_1' \leqq p_1, \quad p_2' \leqq p_2, \quad p_1' + p_2' < p_1 + p_2. \tag{19}$$

Falls der Ausdruck

$$p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 - \lambda_i \tag{20}$$

von Null verschieden ist, läßt sich vermittels der Rekursionsformel (18) die Größe $C^{(i)}_{p_1, p_2}$ durch die Größen $C^{(i')}_{p_1', p_2'}$ $(i' = 1, 2)$ ausdrücken, deren

Indizes p_1', p_2' die Bedingung (19) erfüllen. Da nach der im obigen Satze gemachten Voraussetzung für $p_1 + p_2 \geqq 2$ der Ausdruck (20) nicht verschwinden kann, so lassen sich die Größen $C^{(i)}_{p_1, p_2}$, für welche $p_1 + p_2 \geqq 2$ ist, durch die Größen $C^{(i)}_{10}$, $C^{(i)}_{01}$ ausdrücken. Im Falle $p_1 + p_2 = 1$ ist die rechte Seite der Rekursionsformel (18) gleich Null; wenn λ_1 und λ_2 verschieden sind, verschwindet der Ausdruck (20) im Falle $i = 1$ für $p_1 = 1$, $p_2 = 0$ und im Falle $i = 2$ für $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, während er sonst von Null verschieden ist. Daher nehmen die Koeffizienten von u in der Reihe für x und von v in der Reihe für y willkürliche Werte an, während der Koeffizient von v in der Reihe für x und der Koeffizient von u in der Reihe für y verschwindet. Nehmen wir die willkürlich zu wählenden Koeffizienten gleich 1 an, so erscheinen x, y als vollständig bestimmte Potenzreihen von u, v, und zwar enthält x das einzige lineare Glied u und y das einzige lineare Glied v.

Ist $\lambda_1 = \lambda_2$, so verschwindet jeder der beiden Ausdrücke

$$p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 - \lambda_i \quad (i = 1, 2)$$

sowohl für $p_1 = 1$, $p_2 = 0$ als auch für $p_1 = 0$, $p_2 = 1$; es können also in den Reihen für x und y die Koeffizienten von u und von v willkürlich gewählt werden. Es ist insbesondere auch zulässig, in der Reihe für x den Koeffizienten von u gleich 1, den Koeffizienten von v gleich Null und in der Reihe für y den Koeffizienten von v gleich 1, den Koeffizienten von u gleich Null anzunehmen.

Daß die formal berechneten Potenzreihen (17) für hinreichend kleine Werte von $|u|$ und $|v|$ konvergieren und somit eine Lösung des Differentialgleichungssystems mit zwei willkürlichen Konstanten darstellen, wollen wir jetzt beweisen.

Zum Zweck des Konvergenzbeweises zeigen wir zunächst, daß sich eine positive (von Null verschiedene) Größe ε so angeben läßt, daß

$$|p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 - \lambda_i| > \varepsilon$$

ist für $i = 1, 2$ und für alle ganzzahligen positiven Werte (einschließlich Null) von p_1, p_2, deren Summe $p_1 + p_2$ größer als 1 ist. Es sei nämlich

$$\lambda_i = a_i + b_i\sqrt{-1} \qquad (i = 1, 2);$$

a_1, a_2 liegen zwischen Null und einer positiven Größe ω. Sind A und B beliebige reelle Zahlen, so ist

$$|A + B\sqrt{-1}| = \sqrt{A^2 + B^2} \geqq |A|.$$

Man hat demgemäß

$$|p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 - \lambda_i| \geqq |p_1a_1 + p_2a_2 - a_i|.$$

Für diejenigen Wertepaare p_1, p_2, für welche $p_1 a_1 + p_2 a_2 > 2\omega$ ist, ist

$$| p_1 a_1 + p_2 a_2 - a_i | > \omega .$$

Für die endliche Anzahl von Wertepaaren p_1, p_2, für welche $p_1 a_1 + p_2 a_2 \leqq 2\omega$ ist, nimmt der Ausdruck $| p_1 a_1 + p_2 a_2 - a_i |$ lauter von Null verschiedene Werte an, deren kleinster ω' heißen möge. Ist ε die kleinere der beiden positiven Größen ω und ω', so hat man

$$| p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 - \lambda_i | > \varepsilon .$$

Die aus dem Differentialgleichungssystem (16) berechneten Potenzreihen x, y von u, v vergleichen wir mit den Potenzreihen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ von u, v, welche sich aus den Gleichungen

$$(16') \qquad \begin{cases} G_1 = -\varepsilon \mathfrak{x} + \varepsilon u + \Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0 , \\ G_2 = -\varepsilon \mathfrak{y} + \varepsilon v + \Phi_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0 \end{cases}$$

berechnen lassen. Hierbei ist

$$\Phi_i(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum | A^{(i)}_{k_1, k_2} | \mathfrak{x}^{k_1} \mathfrak{y}^{k_2} \qquad (k_1 + k_2 \geqq 2)$$

gesetzt. Da die Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial (G_1, G_2)}{\partial (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} \right|$$

für $u = v = 0$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = 0$ den von Null verschiedenen Wert ε^2 annimmt, so werden die Gleichungen (16′) durch Potenzreihen

$$(17') \qquad \mathfrak{x} = \sum \mathfrak{C}^{(1)}_{p_1, p_2} u^{p_1} v^{p_2}, \quad \mathfrak{y} = \sum \mathfrak{C}^{(2)}_{p_1, p_2} u^{p_1} v^{p_2} \qquad (p_1 + p_2 \geqq 1)$$

befriedigt, welche für $u = 0$, $v = 0$ verschwinden und konvergieren, wenn die absoluten Beträge von u, v unter einer gewissen Größe R bleiben. Von den Reihen (17′) enthält diejenige für $\mathfrak{x}$ das einzige lineare Glied u, diejenige für $\mathfrak{y}$ das einzige lineare Glied v.

Zur Berechnung der Koeffizienten

$$\mathfrak{C}^{(i)}_{p_1, p_2} \qquad (p_1 + p_2 \geqq 2)$$

dient die Rekursionsformel

$$(18') \qquad \varepsilon \mathfrak{C}^{(i)}_{p_1, p_2} = \cdots ,$$

deren rechte Seite aus der rechten Seite der Rekursionsformel (18) dadurch hervorgeht, daß man $A^{(i)}_{k_1, k_2}$ durch $| A^{(i)}_{k_1, k_2} |$ und $C^{(i')}_{p_1', p_2'}$ durch $\mathfrak{C}^{(i')}_{p_1', p_2'}$ ersetzt. Für sämtliche Koeffizienten $\mathfrak{C}^{(i)}_{p_1, p_2}$ erhält man positive Werte, und aus der Vergleichung der Rekursionsformeln (18) und (18′) ergibt sich

$$| C^{(i)}_{p_1, p_2} | \leqq \mathfrak{C}^{(i)}_{p_1, p_2} .$$

Daher sind auch die Reihen (17) für $| u | < R$, $| v | < R$ konvergent.

Liegen die Größen λ_1, λ_2 in der komplexen Zahlenebene auf derselben Seite einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden, so ist, wenn

$$\arg \lambda_i = \vartheta_i \qquad (i = 1, 2)$$

gesetzt wird, ein Winkel ϑ so vorhanden, daß

$$\vartheta - \frac{\pi}{2} < \vartheta_i < \vartheta + \frac{\pi}{2} \qquad (i = 1, 2)$$

ist. Setzt man

$$\lambda_i' = \lambda_i e^{-\vartheta\sqrt{-1}} \qquad (i = 1, 2),$$

so ist

$$\vartheta_i' = \arg \lambda_i' = \vartheta_i - \vartheta,$$

also

$$-\frac{\pi}{2} < \vartheta_i' < \frac{\pi}{2} \qquad (i = 1, 2),$$

so daß λ_1', λ_2'' positive reelle Teile haben. Es ist aber zulässig, die Funktionen X, Y, also auch λ_1, λ_2 gleichzeitig mit $e^{-\vartheta\sqrt{-1}}$ zu multiplizieren.

Es bleibt noch der Fall zu behandeln, daß λ_1, λ_2 auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden, aber auf verschiedenen Seiten des Nullpunktes liegen. Ist

$$\arg \lambda_1 = \vartheta, \qquad \arg \lambda_2 = \vartheta + \pi,$$

so erhalten wir, indem wir λ_1, λ_2 mit $e^{-\vartheta\sqrt{-1}}$ multiplizieren, zwei Größen λ_1', λ_2' mit den Argumenten 0 und π, also eine positive und eine negative reelle Größe. Demgemäß nehmen wir jetzt an, daß in dem Differentialgleichungssystem (14) λ_1 reell positiv, λ_2 reell negativ ist.

Die Reihen (17) gehen, wenn man $C_2 = 0$ setzt, in Potenzreihen von $u = C_1 t^{\lambda_1}$ und, wenn man $C_1 = 0$ setzt, in Potenzreihen von $v = C_2 t^{\lambda_2}$ über. Solche Reihen lassen sich auch unter der jetzigen Annahme $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ bilden.

Wenn man die Reihen

$$x = \sum_{p=1}^{\infty} C_p^{(1)} u^p, \quad y = \sum_{p=1}^{\infty} C_p^{(2)} u^p \tag{21}$$

in die Differentialgleichungen (16) oder

$$\lambda_1 u \frac{dx}{du} = \lambda_1 x + \cdots, \quad \lambda_2 u \frac{dy}{du} = \lambda_2 y + \cdots$$

einsetzt, erhält man Rekursionsformeln

$$(p\lambda_1 - \lambda_i) C_p^{(i)} = \cdots \qquad (i = 1, 2), \tag{22}$$

welche rechts nur Größen $C_{p'}^{(i')}$ $(i' = 1, 2;\ p' < p)$ enthalten. Im Falle $i = 1$ ist $p\lambda_1 - \lambda_i = (p - 1)\lambda_1$ gleich Null für $p = 1$, sonst von Null

verschieden; $p\lambda_1 - \lambda_2$ ist, da $-\lambda_2$ reell positiv ist, stets von Null verschieden. Wenn $C_1^{(1)}$ beliebig, etwa gleich 1, angenommen wird, sind alle Koeffizienten $C_p^{(i)}$ bestimmt. Den Beweis, daß die aufgestellten Reihen für hinreichend kleine Werte von $|u|$ konvergieren, wollen wir nicht führen.

In ähnlicher Weise sieht man, daß die Differentialgleichungen (14) durch Potenzreihen von $v = C_2 t^{\lambda_2}$ befriedigt werden. Diese Reihen sind für hinreichend kleine Werte von $|v|$, also, da λ_2 negativ ist, für hinreichend große Werte von $|t|$ konvergent.

Der Satz am Anfang dieses Paragraphen kann also folgendermaßen ergänzt werden.

Wenn λ_1 reell positiv, λ_2 reell negativ ist, läßt sich das Differentialgleichungssystem (14) sowohl durch Potenzreihen von

$$u = C_1 t^{\lambda_1}$$

mit der willkürlichen Konstanten C_1, als auch durch Potenzreihen von

$$v = C_2 t^{\lambda_2}$$

mit der willkürlichen Konstanten C_2 befriedigen.

Ist $\lambda_2 = m\lambda_1$ oder $\lambda_1 = m\lambda_2$, wo m eine von 1 verschiedene ganze positive Zahl ist, so versagen die obigen Entwicklungen. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = m$ setzen und die Differentialgleichungen auf die Form

$$(23) \qquad \begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} = x + ax^2 + 2bxy + cy^2 + \cdots, \\ t\dfrac{dy}{dt} = my + \mu x + a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + \cdots \end{cases}$$

bringen; die Zufügung des Gliedes μx bedingt keine Erschwerung. Durch die Substitution

$$y = x\left(z + \frac{\mu}{1-m}\right)$$

wird das System (23) auf die Form gebracht:

$$t\frac{dx}{dt} = x + \cdots,$$

$$t\frac{dz}{dt} = (m-1)z + \nu x + \cdots,$$

wo

$$\nu = a' + \frac{(2b'-a)\mu}{1-m} + \frac{(c'-2b)\mu^2}{(1-m)^2} - \frac{c\mu^3}{(1-m)^3}$$

ist. Durch wiederholte Anwendung dieser Substitution kann die ganze positive Zahl m auf 1 reduziert, also das System (23) auf die Form

$$(24)\qquad \begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} = x + \cdots, \\ t\dfrac{dy}{dt} = y + \mu x + \cdots \end{cases}$$

gebracht werden.

Dasselbe Differentialgleichungssystem liegt vor, wenn λ_0 eine Doppelwurzel der Gleichung $f(\lambda) = 0$ und $X = \lambda_0 x + \cdots$, $Y = \lambda_0 y + x + \cdots$ ist; denn man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda_0 = 1$ annehmen. Im Falle $\mu = 0$ läßt sich das System (24) wie oben behandeln, so daß wir jetzt μ von Null verschieden voraussetzen.

Wir setzen

$$(25)\qquad u = t, \qquad v = -t\log t.$$

Dann ist

$$(26)\qquad t\frac{du}{dt} = u, \qquad t\frac{dv}{dt} = v - u,$$

und die Differentialgleichungen (24) gehen über in

$$(27)\qquad \begin{cases} u\dfrac{\partial x}{\partial u} + (v-u)\dfrac{\partial x}{\partial v} = x + \cdots, \\ u\dfrac{\partial y}{\partial u} + (v-u)\dfrac{\partial y}{\partial v} = y + \mu x + \cdots. \end{cases}$$

Wir suchen dieselben durch Potenzreihen von u, v

$$(28)\qquad x = \sum C^{(1)}_{p_1,p_2} u^{p_1} v^{p_2}, \quad y = \sum C^{(2)}_{p_1,p_2} u^{p_1} v^{p_2} \quad (p_1 + p_2 \geqq 1)$$

zu befriedigen. Setzt man diese Reihen in (27) ein und vergleicht man die Koeffizienten von $u^{p_1} v^{p_2}$, so erhält man zur Berechnung der Größen $C^{(i)}_{p_1,p_2}$ $(i = 1, 2)$ die Rekursionsformeln

$$(29)\qquad \begin{cases} (p_1 + p_2 - 1)\, C^{(1)}_{p_1,p_2} = (p_2 + 1)\, C^{(1)}_{p_1-1,p_2+1} + \cdots, \\ (p_1 + p_2 - 1)\, C^{(2)}_{p_1,p_2} = (p_2 + 1)\, C^{(2)}_{p_1-1,p_2+1} + \mu C^{(1)}_{p_1,p_2} + \cdots, \end{cases}$$

wo die nicht angeschriebenen Glieder Größen $C^{(i')}_{p_1',p_2'}$ $(i' = 1, 2;\ p_1' + p_2' < p_1 + p_2)$ enthalten. Für $p_1 + p_2 = 1$ haben wir die Formeln

$$0 = C^{(1)}_{01}, \qquad 0 = 0,$$
$$0 = C^{(2)}_{01} + \mu C^{(1)}_{10}, \qquad 0 = \mu C^{(1)}_{01};$$

sie werden z. B. durch die Werte befriedigt:

$$C_{10}^{(1)} = 1, \qquad C_{01}^{(1)} = 0,$$
$$C_{10}^{(2)} = 1, \qquad C_{01}^{(2)} = -\mu.$$

Alle folgenden Größen $C_{p_1,p_2}^{(i)}$ $(p_1 + p_2 > 1)$ sind nun durch die Rekursionsformeln (29) bestimmt.

Versteht man unter u, v die allgemeinste Lösung der Differentialgleichungen (26), nämlich

$$u = Ct, \qquad v = -Ct\log t + C't \tag{30}$$

mit den willkürlichen Konstanten C, C', so bleiben alle bisherigen Betrachtungen unverändert bestehen. Die Differentialgleichungen (14) werden also durch die Reihen (28) befriedigt, wo u, v die Ausdrücke (30) sind.

Der Beweis dafür, daß diese Reihen konvergieren, wenn die absoluten Beträge von u und v hinreichend klein sind, möge wieder übergangen werden[1]).

§ 55. Singuläre Punkte der reellen Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir betrachten jetzt die Differentialgleichung (A) unter der Voraussetzung, daß X, Y reelle analytische Funktionen der reellen Veränderlichen x, y von der Form (1) sind, und untersuchen die in der Nähe des singulären Punktes $x = 0$, $y = 0$ (den wir kurz O nennen) verlaufenden reellen Integralkurven. Die Wurzeln λ_1, λ_2 der quadratischen Gleichung (6) mit reellen Koeffizienten sind entweder reell oder konjugiert komplex.

Wenn wir λ_1, λ_2 als von Null verschieden und zunächst auch als voneinander verschieden voraussetzen und beachten, daß X, Y, also auch λ_1, λ_2 mit einem und demselben Faktor multipliziert werden können, haben wir die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

1) λ_1, λ_2 sind reell und von gleichem Vorzeichen, etwa $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$;

2) λ_1, λ_2 sind reell und von entgegengesetztem Vorzeichen, etwa $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$;

---

[1]) Entsprechende Untersuchungen über Differentialgleichungssysteme mit mehreren abhängigen Veränderlichen findet man u. a. in einer Arbeit des Verfassers in Crelles Journal, Bd. 116, 117, sowie bei Lindelöf, Acta Soc. Fennicae, Bd. 22.

3) λ_1, λ_2 sind konjugiert komplex mit von Null verschiedenem reellen Teil, also

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

wo α, β reell sind und $\alpha > 0$ angenommen werden möge;

4) λ_1, λ_2 sind konjugiert rein imaginär, so daß

$$\lambda_1 = i, \qquad \lambda_2 = -i$$

angenommen werden kann.

Die Differentialgleichung (A) wird unter Einführung der Hilfsveränderlichen t durch das System (13) ersetzt und dieses durch die Substitution (2) auf die Form

$$\text{(31)} \qquad \begin{cases} t\dfrac{d\xi}{dt} = \Xi = \lambda_1 \xi + \cdots, \\ t\dfrac{d\eta}{dt} = \mathsf{H} = \lambda_2 \eta + \cdots \end{cases}$$

gebracht.

Im dritten und vierten Falle, wo λ_1, λ_2 konjugiert komplex sind, sind, wenn wir z. B. $h_1 = h_2 = 1$ annehmen, k_1 und k_2 konjugiert komplex; reellen Werten von x, y entsprechen daher konjugiert komplexe Werte von ξ, η sowie auch konjugiert komplexe Werte von Ξ, H. Wir setzen daher

$$\text{(32)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \xi + \eta, \\ \mathfrak{y} = i(\xi - \eta) \end{cases}$$

und erhalten die Differentialgleichungen

$$\text{(33)} \qquad \begin{cases} t\dfrac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{X} = \Xi + \mathsf{H} = \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} + \cdots, \\ t\dfrac{d\mathfrak{y}}{dt} = \mathfrak{Y} = i(\Xi - \mathsf{H}) = -\beta\mathfrak{x} + \alpha\mathfrak{y} + \cdots; \end{cases}$$

reellen Werten von x, y entsprechen reelle Werte von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, und $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ lassen sich als reelle Funktionen von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ darstellen.

Im ersten und dritten Falle sind die reellen Teile von λ_1 und λ_2 positiv. Den Fall, daß $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ oder $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ eine ganze positive Zahl ist, schließen wir zunächst aus. Nach § 54 wird das System (31) bzw. (33), wenn man

$$\text{(34)} \qquad u = C_1 t^{\lambda_1}, \qquad v = C_2 t^{\lambda_2}$$

setzt, durch die Potenzreihen

$$\text{(35)} \qquad \begin{cases} \xi = \mathfrak{P}(u, v) = u + \cdots, \\ \eta = \mathfrak{Q}(u, v) = v + \cdots \end{cases}$$

befriedigt, welche konvergieren, wenn die absoluten Beträge von u, v hinreichend klein sind. Die Auflösung der Gleichungen (35) nach u, v ergibt

$$\begin{cases} u = \mathfrak{F}(\xi, \eta) = \xi + \cdots, \\ v = \mathfrak{G}(\xi, \eta) = \eta + \cdots, \end{cases} \tag{36}$$

wo $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ in Potenzreihen von ξ, η entwickelbar sind, welche mit den angeschriebenen linearen Gliedern beginnen und in der Umgebung der Stelle $\xi = 0$, $\eta = 0$ konvergieren. Die Elimination der Hilfsveränderlichen t ergibt, da

$$\frac{u^{\lambda_2}}{v^{\lambda_1}} = \frac{C_1^{\lambda_2}}{C_2^{\lambda_1}} = C$$

eine Konstante ist, das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A) in der Form

$$\frac{\mathfrak{F}(\xi, \eta)^{\lambda_2}}{\mathfrak{G}(\xi, \eta)^{\lambda_1}} = C. \tag{37}$$

Im Falle 1), in welchem λ_1, λ_2 reell und positiv sind, geht durch jeden Punkt ξ_0, η_0 in der Nähe des singulären Punktes $O(\xi = 0, \eta = 0)$ eine und nur eine Integralkurve, welche durch die Gleichung

$$(\xi + \cdots)^{\lambda_2} = C(\eta + \cdots)^{\lambda_1}$$

mit dem Werte

$$C = \frac{\mathfrak{F}(\xi_0, \eta_0)^{\lambda_2}}{\mathfrak{G}(\xi_0, \eta_0)^{\lambda_1}}$$

der Konstanten dargestellt wird. Diese Kurve geht durch den singulären Punkt, welcher Knotenpunkt genannt wird.

Im Falle 3), in welchem $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ und $\alpha > 0$ ist, bringen wir die Integralgleichung (37) zunächst auf reelle Form. Jetzt sind $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ konjugiert komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen x, y; wir nehmen, falls $a_2 \neq 0$ ist, $h_i = 1$, $k_i = \dfrac{\lambda_i - a_1}{a_2}$ $(i = 1, 2)$ an und setzen

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{f} + i\mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{f} - i\mathfrak{g},$$

so daß

$$\mathfrak{f} = x + \frac{\alpha - a_1}{a_2} y + \cdots, \quad \mathfrak{g} = \frac{\beta}{a_2} y + \cdots$$

reelle analytische Funktionen der reellen Veränderlichen x, y sind. Setzt man weiter $\log C = 2i\mathfrak{C}$, so lautet die Integralgleichung

$$(\alpha - i\beta)\log(\mathfrak{f} + i\mathfrak{g}) - (\alpha + i\beta)\log(\mathfrak{f} - i\mathfrak{g}) = 2i\mathfrak{C}$$

oder, wenn man an Stelle von $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, die man als rechtwinklige Koordinaten der Ebene auffassen kann, vermittels der Gleichungen

$$\mathfrak{f} \pm i\mathfrak{g} = Re^{\pm i\Phi}$$

Polarkoordinaten R, Φ einführt,

$$(\alpha - i\beta)(\log R + i\Phi) - (\alpha + i\beta)(\log R - i\Phi) = 2i\mathfrak{C}.$$

Diese Gleichung nimmt die Form an:

$$\alpha\Phi - \beta \log R = \mathfrak{C}$$

oder, wenn

$$\Phi_0 = \frac{\mathfrak{C}}{\alpha}$$

als Integrationskonstante eingeführt wird:

$$R = e^{\frac{\alpha}{\beta}(\Phi - \Phi_0)}.$$

Dies ist die Gleichung einer logarithmischen Spirale mit dem asymptotischen Punkt $R = 0$, welchem nach Rückkehr zu den ursprünglichen Veränderlichen der singuläre Punkt $x = 0$, $y = 0$ entspricht. Es nähern sich also im Falle 3) sämtliche in der Nähe des singulären Punktes verlaufenden Integralkurven diesem Punkte asymptotisch; der singuläre Punkt wird Strudelpunkt genannt.

Im Falle 2), in welchem λ_1 positiv, λ_2 negativ ist, wird nach § 54 das System (31) durch Potenzreihen von

$$u = C_1 t^{\lambda_1}$$

befriedigt, welche in der Umgebung von $u = 0$ konvergieren:

$$\xi = u + Au^2 + \cdots, \qquad \eta = Bu^2 + \cdots, \tag{38}$$

ferner durch Potenzreihen von

$$v = C_2 t^{\lambda_2} = C_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{-\lambda_2},$$

welche in der Umgebung von $v = 0$ konvergent sind:

$$\xi = A'v^2 + \cdots, \qquad \eta = v + B'v^2 + \cdots. \tag{39}$$

Durch Elimination von u aus (38) erhält man die Integralkurve

$$\eta = B\xi^2 + \cdots, \tag{40}$$

welche die Gerade $\eta = 0$ im singulären Punkt berührt, und durch Elimination von v aus (39) die Integralkurve

$$\xi = A'\eta^2 + \cdots, \tag{41}$$

welche im singulären Punkte die Gerade $\xi = 0$ berührt.

Wir weisen nach, daß im Falle 2) außer den beiden gefundenen Integralkurven keine weitere Integralkurve vorhanden ist, welche durch den singulären Punkt geht oder sich demselben unbegrenzt nähert.

Zur Vereinfachung der Differentialgleichung wenden wir die Substitution

$$x = \xi - A'\eta^2 - \cdots,$$
$$y = \eta - B\xi^2 - \cdots$$

an, so daß $y = 0$ und $x = 0$ Integralkurven werden. Die Differentialgleichung wird dadurch

$$\frac{dx}{\mathfrak{X}(x, y)} = \frac{dy}{\mathfrak{Y}(x, y)},$$

wo $\mathfrak{X} = \lambda_1 x + \cdots$, $\mathfrak{Y} = \lambda_2 y + \cdots$ Potenzreihen von x, y darstellen. Die Einsetzung der beiden bekannten Lösungen $x = 0$ und $y = 0$ ergibt, daß $\mathfrak{X}(0, y) = 0$ und $\mathfrak{Y}(x, 0) = 0$ sein muß. Wir können also setzen:

$$\mathfrak{X} = x(\lambda_1 + \mathfrak{A}), \quad \mathfrak{Y} = y(\lambda_2 + \mathfrak{B}),$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Potenzreihen von x, y bezeichnen, die für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden. Setzt man

$$\frac{\lambda_2 + \mathfrak{B}}{\lambda_1 + \mathfrak{A}} = -q + \mathfrak{P}(x, y),$$

wo $q = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ eine positive Zahl und $\mathfrak{P}(x, y)$ eine Potenzreihe ohne konstantes Glied darstellt, so hat man die Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} = y[-q + \mathfrak{P}(x, y)].$$

Wir nehmen nun an, es sei außer den beiden Geraden $x = 0$ und $y = 0$ eine Integralkuve $y = f(x)$ vorhanden, welche sich dem singulären Punkt $O(x = 0, y = 0)$ unbegrenzt nähert. Die Integralkurve kann keine der beiden Koordinatenachsen schneiden, da die Achsen Integralkurven sind und durch einen in der Nähe von O gelegenen Punkt nicht zwei Integralkurven gehen können. Wir nehmen demgemäß an, daß die Kurve $y = f(x)$ z. B. im ersten Quadranten verläuft, daß also nur positive Werte von x und y in Betracht kommen. Unter Anwendung der Bezeichnung

$$g(x) = \mathfrak{P}[x, f(x)]$$

ist

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx[-q + g(x)]}{x};$$

ist $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0$ ein in der Nähe von O gelegener Punkt der Integralkurve, so ergibt die Integration

$$\log \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}_0} = \int_{\mathfrak{x}_0}^{\mathfrak{x}} \frac{-q + g(\mathfrak{x})}{\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}$$

oder

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 e^{\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}_0} \frac{q - g(\mathfrak{x})}{\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}}.$$

Da sich die Kurve $\mathfrak{y} = f(\mathfrak{x})$ dem Punkt O unbegrenzt nähert, so läßt sich eine positive Größe $\varepsilon < \mathfrak{x}_0$ so angeben, daß für $\mathfrak{x} < \varepsilon$

$$\mathfrak{y} < \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{y}_0, \quad g(\mathfrak{x}) < \tfrac{1}{2}\,q, \quad q - g(\mathfrak{x}) > \tfrac{1}{2}\,q$$

ist. Dann ist aber für $\mathfrak{x} < \varepsilon < \mathfrak{x}_0$

$$\mathfrak{y} > \mathfrak{y}_0 e^{\int_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}_0} \frac{1}{2} q \frac{d\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}}} = \mathfrak{y}_0 e^{\frac{1}{2} q \log \frac{\mathfrak{x}_0}{\mathfrak{x}}}$$

oder

$$\mathfrak{y} > \mathfrak{y}_0.$$

Unsere Annahme hat also auf einen Widerspruch geführt.

Im Falle 2) heißt der singuläre Punkt Sattelpunkt.

§ 56. Der Fall des Wirbelpunktes.

Im Falle 4), in welchem $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ ist, kann man die Differentialgleichung (A) durch eine reelle lineare Substitution so umformen, daß

$$X = y + \cdots, \qquad Y = -x + \cdots \tag{42}$$

wird, wo die weggelassenen Glieder von höchstens der zweiten Dimension in x, y sind. Man hat nur in der im Fall (3) angewandten Transformation $\alpha = 0$, $\beta = 1$ zu setzen und statt $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ wieder x, y zu schreiben.

Wenn man vermittels der Gleichungen

$$x = \varrho \cos \omega, \qquad y = \varrho \sin \omega \tag{43}$$

an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten x, y die Polarkoordinaten ϱ, ω einführt, geht die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}$$

in

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = \frac{R}{\Omega}$$

über, wo

$$R = X\cos\omega + Y\sin\omega,$$
$$\varrho\,\mathfrak{Q} = -X\sin\omega + Y\cos\omega$$

ist. Wir setzen

$$X = y + \sum_{n=2}^{\infty} X_n, \quad Y = -x + \sum_{n=2}^{\infty} Y_n,$$

wo X_n, Y_n ganze homogene Funktionen n^{ten} Grades von x, y darstellen. Nach Einführung von Polarkoordinaten hat man

$$X_n = \varrho^n \varphi_n(\omega), \quad Y_n = \varrho^n \psi_n(\omega),$$

wo φ_n, ψ_n lineare Verbindungen von

$$\cos\nu\omega, \quad \sin\nu\omega \qquad (\nu = n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots)$$

sind. Weiter ist

$$R = \varrho^2 R_2(\omega) + \varrho^3 R_3(\omega) + \cdots,$$
$$\mathfrak{Q} = -1 + \varrho\,\mathfrak{Q}_1(\omega) + \varrho^2 \mathfrak{Q}_2(\omega) + \cdots,$$

wo R_n und $\mathfrak{Q}_{n-1}$ lineare Verbindungen von

$$\cos\nu\omega, \quad \sin\nu\omega \qquad (\nu = n+1,\ n-1,\ n-3,\ \ldots)$$

sind. Daraus folgt

$$\frac{R}{\mathfrak{Q}} = \varrho^2 g_2(\omega) + \varrho^3 g_3(\omega) + \cdots,$$

und zwar ist g_n eine lineare Verbindung von

$$\cos\nu\omega, \quad \sin\nu\omega \qquad (\nu = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots),$$

wenn n ungerade, eine lineare Verbindung von

$$\cos\nu\omega, \quad \sin\nu\omega \qquad (\nu = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots),$$

wenn n gerade ist.

Wir integrieren die Differentialgleichung

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = \varrho^2 g_2(\omega) + \varrho^3 g_3(\omega) + \cdots \tag{44}$$

unter der Annahme, daß für $\omega = 0$ $\varrho = c$ sein soll. Nach § 50 läßt sich ϱ als Potenzreihe von c darstellen, deren Koeffizienten von ω abhängen:

$$\varrho = c + c^2 \varrho_2(\omega) + c^3 \varrho_3(\omega) + \cdots; \tag{45}$$

diese Reihe ist, wenn ω etwa auf das Gebiet $|\omega| \leqq 2\pi$ beschränkt wird, für hinreichend kleine Werte von $|c|$ konvergent. Durch Einsetzung

der Reihe (45) in die Differentialgleichung (44) und Vergleichung der Koeffizienten von c, c^2, c^3, ... erhält man die Gleichungen

$$(46)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\varrho_2}{d\omega} = g_2, \\ \dfrac{d\varrho_3}{d\omega} = 2\varrho_2 g_2 + g_3, \\ \dfrac{d\varrho_4}{d\omega} = (\varrho_2^2 + 2\varrho_3)\, g_2 + 3\varrho_2 g_3 + g_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

die so zu integrieren sind, daß ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, ... für $\omega = 0$ verschwinden.

Da g_2 als lineare Verbindung von $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos 3\omega$, $\sin 3\omega$ kein konstantes Glied enthält, so ist auch ϱ_2 eine trigonometrische Funktion von ω mit der Periode 2π. Nun ist $2\varrho_2 g_2 + g_3$ eine lineare Verbindung von cos und sin der Vielfachen von ω, enthält aber im allgemeinen auch ein konstantes Glied a_3; folglich enthält ϱ_3 ein Glied $a_3\omega$ und hat nur im Falle $a_3 = 0$ die Periode 2π. Ebenso besitzt ϱ_4 nur dann die Periode 2π, wenn das in dem Ausdruck für ϱ_4 enthaltene Glied $a_4\omega$ verschwindet usw.

Wenn die Konstanten a_3, a_4, ... nicht sämtlich verschwinden, so möge a_{n+1} die erste sein, welche einen von Null verschiedenen Wert hat. Dann ist

$$\varrho_2(2\pi) = \varrho_2(0) = 0, \ldots, \qquad \varrho_n(2\pi) = \varrho_n(0) = 0,$$

während

$$\varrho_{n+1}(2\pi) = 2\pi a_{n+1} = \alpha$$

von Null verschieden ist. Bezeichnet man den (positiven) Wert von ϱ für $\omega = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) mit c_k, so daß $c_0 = c$ ist, so hat man

$$c_1 = c_0 + \alpha c_0^{n+1} + \cdots;$$

da zwischen c_{k+1} und c_k derselbe Zusammenhang besteht wie zwischen c_1 und c_0, so ist auch

$$c_{k+1} = c_k + \alpha c_k^{n+1} + \cdots,$$

vorausgesetzt, daß c_k hinreichend klein ist.

Ist α negativ, etwa $\alpha = -\gamma$, $\gamma > 0$, so ist

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = 1 - \gamma c_k^n + \cdots < 1 - \Gamma\gamma c_k^n < 1,$$

wenn c_k hinreichend klein ist, also

$$c_{k+1} < c_k.$$

Die abnehmenden positiven Größen

$$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

besitzen einen positiven oder verschwindenden Grenzwert C. Wäre $C > 0$, so hätte man wegen $c_k > C$

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} < 1 - \Gamma \gamma C^n,$$

folglich

$$c_k < c_0 (1 - \Gamma \gamma C^n)^k$$

und demnach

$$\lim_{k \to \infty} c_k = 0,$$

was der Annahme $C > 0$ widerspricht.

Ist $\alpha > 0$, so ist

$$\varrho_{n+1}(-2\pi) = -2\pi a_{n+1} = -\alpha$$

negativ; man hat

$$c_{-1} = c_0 - \alpha c_0^{n+1} + \cdots$$

und entsprechend

$$c_{-k-1} = c_{-k} - \alpha c_{-k}^{n+1} + \cdots,$$

und die vorhin angewandte Schlußweise ergibt

$$\lim_{k \to \infty} c_{-k} = 0.$$

Wenn im Falle 4) die Größen $a_3, a_4, \ldots$ nicht sämtlich verschwinden, so nähern sich die in der Nähe des singulären Punktes O verlaufenden Integralkurven diesem Punkte asymptotisch wie im dritten Falle (Strudelpunkt).

Sind jedoch die unendlich vielen Bedingungen

$$a_3 = 0, \qquad a_4 = 0, \ldots$$

erfüllt, so wird der singuläre Punkt O von unendlich vielen geschlossenen Integralkurven umgeben; der Punkt O heißt dann Wirbelpunkt. Jetzt sind nämlich $\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots$ periodische Funktionen von ω mit der Periode 2π; daher besitzt die Funktion ϱ von ω für hinreichend kleine Werte von c die Periode 2π, so daß die Gleichung (45) eine den Punkt O umgebende geschlossene Kurve darstellt.

Besitzt die Differentialgleichung (A) im Falle 4), d. i. $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, ein Integral

$$F(x, y) = \text{const.}, \tag{47}$$

wo $F(x, y)$ eine in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ reguläre Funktion darstellt, so ist der Punkt O ein Wirbelpunkt. Denn die Funktion $F(x, y)$ genügt der partiellen Differentialgleichung

$$X(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} + Y(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} = (y + \cdots)\frac{\partial F}{\partial x} + (-x + \cdots)\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Setzt man

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x, y),$$

wo F_n eine ganze homogene Funktion n^{ten} Grades von x, y darstellt, so ist zunächst

$$y\frac{\partial F_1}{\partial x} - x\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0,$$

was nur möglich ist, wenn die Koeffizienten a, b der linearen Funktion $F_1 = ax + by$ verschwinden. Weiter ist

$$y\frac{\partial F_2}{\partial x} - x\frac{\partial F_2}{\partial y} = 0,$$

was für die Koeffizienten der Funktion

$$F_2 = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

die Bedingungen $\alpha = \gamma$, $\beta = 0$ ergibt, so daß

$$F_2 = x^2 + y^2$$

angenommen werden kann. Die Gleichung

$$x^2 + y^2 + F_3(x, y) + \cdots = \text{const.} \tag{48}$$

stellt aber, wenn für die Konstante ein kleiner positiver Wert r^2 gesetzt wird, eine geschlossene Kurve dar, die von dem Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ nur wenig abweicht.

Das Vorhandensein eines Integrals $F = \text{const.}$ ist bisweilen von vornherein bekannt, während sonst im allgemeinen schwer zu ermitteln ist, ob die unendlich vielen Bedingungen $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, ... erfüllt sind.

§ 57. Ausnahmefälle.

Im Ausnahmefall $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ haben wir entweder Differentialgleichungen

$$t\frac{d\xi}{dt} = \xi + \cdots, \quad t\frac{d\eta}{dt} = \eta + \cdots,$$

welche wie Fall 1) in § 55 behandelt werden, oder Differentialgleichungen

$$t\frac{d\xi}{dt} = \xi + \cdots, \quad t\frac{d\mu}{dt} = \eta + \mu\xi + \cdots \qquad (\mu \neq 0),$$

welche durch Potenzreihen

$$\xi = \mathfrak{P}(u, v) = u + \cdots,$$
$$\eta = \mathfrak{Q}(u, v) = u - \mu v + \cdots$$

von

$$u = t, \qquad v = ct - t\log t$$

befriedigt werden (in den früheren Formeln ist Ct durch t ersetzt). Durch Auflösung erhalten wir

$$u = \mathfrak{F}(\xi, \eta) = \xi + \cdots,$$
$$v = \mathfrak{G}(\xi, \eta) = \frac{\xi - \eta}{\mu} + \cdots$$

als Potenzreihen von ξ, η und hieraus durch Elimination von t

$$\mathfrak{G}(\xi, \eta) = \mathfrak{F}(\xi, \eta) \cdot (c - \log \mathfrak{F}(\xi, \eta)).$$

Diese Kurve geht durch den Punkt O; durch den in der Nähe von O beliebig gewählten Punkt ξ_0, η_0 geht eine und nur eine Integralkurve, da c durch die Gleichung

$$c = \frac{\mathfrak{G}(\xi_0, \eta_0)}{\mathfrak{F}(\xi_0, \eta_0)} + \log \mathfrak{F}(\xi_0, \eta_0)$$

bestimmt ist.

Im Ausnahmefall $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = m$ (m ganze positive Zahl größer als 1) haben wir die Differentialgleichungen

$$t\frac{d\xi}{dt} = \xi + \cdots, \quad t\frac{d\eta}{dt} = m\eta + \mu x + \cdots,$$

welche durch die Substitution

$$\eta = \xi\left(\zeta + \frac{\mu}{1 - m}\right)$$

auf Differentialgleichungen von derselben Form zurückgeführt werden, in welchen m durch $m - 1$ ersetzt ist. Durch $m - 1$ derartige Substitutionen, welche sich zu einer Substitution von der Form

$$\eta = \frac{\mu}{1 - m}\xi + \frac{\mu_1}{2 - m}\xi^2 + \cdots + \mu_{m-2}\xi^{m-1} + \xi^{m-1}\zeta$$

zusammensetzen, erhält man ein Differentialgleichungssystem

$$t\frac{d\xi}{dt} = \xi + \cdots, \quad t\frac{d\zeta}{dt} = \zeta + \nu\xi + \cdots,$$

woraus sich ζ als Funktion von ξ von der vorhin betrachteten Form mit einer willkürlichen Konstanten ergibt. Die daraus abgeleitete Funktion η von ξ mit einer willkürlichen Konstanten stellt eine Schar von Integralkurven dar, welche durch den Punkt O gehen.

In den beiden betrachteten Ausnahmefällen ist der singuläre Punkt O ein Knotenpunkt.

Sind

$$X = a_1 x + b_1 y, \qquad Y = a_2 x + b_2 y$$

lineare Funktionen von x, y, so haben wir die homogene Differentialgleichung

$$\frac{dx}{a_1 x + b_1 y} = \frac{dy}{a_2 x + b_2 y}, \tag{49}$$

die sich elementar integrieren läßt. Führen wir vermöge (2) die neuen Veränderlichen ξ, η ein, so haben wir im ersten und zweiten Fall die Differentialgleichung

$$\frac{d\xi}{\lambda_1 \xi} = \frac{d\eta}{\lambda_2 \eta}$$

mit reellen Werten von λ_1, λ_2. Ihr allgemeines Integral ist

$$\eta = C \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

mit der willkürlichen Konstanten C. Im ersten Falle $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$ gehen alle Integralkurven durch den Anfangspunkt (Knotenpunkt), im zweiten Falle $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$ nur $\eta = 0$ und $\xi = 0$ (Sattelpunkt). Im dritten Fall $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ geht die Differentialgleichung durch die Substitution (32) in

$$\frac{dx}{\alpha x + \beta \mathfrak{y}} = \frac{d\mathfrak{y}}{-\beta x + \alpha \mathfrak{y}}$$

und, wenn man vermöge

$$x = \varrho \cos \omega, \quad \mathfrak{y} = \varrho \sin \omega$$

Polarkoordinaten einführt, in

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = \frac{\alpha}{\beta} \varrho$$

über; ihre Integralkurven sind die logarithmischen Spiralen $\varrho = C e^{\frac{\alpha}{\beta}\omega}$ (Strudelpunkt). Im vierten Falle hat man $\alpha = 0$ zu setzen, so daß als Integralkurven die Kreise $\varrho = C$ auftreten (Wirbelpunkt).

Im Ausnahmefall $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ hat man entweder die Differentialgleichung

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{d\eta}{\eta}$$

mit der Lösung $\eta = C\xi$ (Knotenpunkt) oder die Differentialgleichung

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{d\eta}{\eta + \xi}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\eta = \xi(C + \log|\xi|);$$

auch hier gehen alle Integralkurven durch den Anfangspunkt (Knotenpunkt).

Es treten also bei der einfachen Differentialgleichung (49) dieselben Singularitäten auf wie bei der allgemeinen Differentialgleichung (A). Während aber im vierten Falle bei (49) ein Wirbelpunkt erscheint, ist bei der allgemeineren Differentialgleichung (A) auch im vierten Falle in der Regel ein Strudelpunkt und nur unter gewissen Bedingungen ein Wirbelpunkt vorhanden.

§ 58. Divergente Reihen, welche Differentialgleichungen genügen.

In § 53f. wurde die Differentialgleichung (A) unter der Voraussetzung betrachtet, daß die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen X, Y mit in x, y linearen Gliedern beginnen. Wenn in einer dieser Funktionen die linearen Glieder fehlen, treten ganz andere Verhältnisse auf.

Nehmen wir z. B. die Differentialgleichung

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} = G(x, y), \tag{50}$$

worin

$$G(x, y) = ay + A_{10}x + A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2 + \cdots$$

eine für $x = 0$, $y = 0$ verschwindende, in der Umgebung dieser Stelle reguläre Funktion und k eine ganze positive Zahl bedeutet.

Ist $k = 0$, liegt also die Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} = G(x, y) \tag{51}$$

vor und ist a keine ganze positive Zahl, so wird die Differentialgleichung durch eine Potenzreihe

$$y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots \tag{52}$$

formell befriedigt, deren Koeffizienten aus den Gleichungen berechnet werden:

$$(1 - a)C_1 = A_{10},$$
$$(2 - a)C_2 = A_{20} + A_{11}C_1 + A_{02}C_1^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Daß die so berechnete Potenzreihe für hinreichend kleine Werte von $|x|$ konvergiert, erkennt man, indem man die Differentialgleichung (51) durch das System

$$t\frac{dx}{dt} = x,$$

$$t\frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

ersetzt und die Sätze von § 54 anwendet. Es lassen sich nämlich x und y als Potenzreihen von Ct darstellen, welche konvergieren, wenn der absolute Betrag dieser Größe hinreichend klein ist. Aus der ersten Gleichung des Systems ergibt sich $x = Ct$, so daß y als Potenzreihe von x erscheint, welche in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ konvergiert.

Nehmen wir jetzt in (50) $k = 1$, so haben wir die Differentialgleichung

$$x^2\frac{dy}{dx} = G(x, y), \tag{53}$$

welche, wenn a von Null verschieden ist, ebenfalls durch eine Potenzreihe

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \tag{54}$$

formell befriedigt wird. Zur Berechnung der Koeffizienten $C_1, C_2, \ldots$ hat man die Gleichungen

$$0 = aC_1 + A_{10},$$
$$C_1 = aC_2 + A_{20} + A_{11}C_1 + A_{02}C_1^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die so berechnete Potenzreihe ist aber im allgemeinen für jeden Wert von x (außer $x = 0$) divergent.

Um dies zu zeigen, genügt das Beispiel der Differentialgleichung

$$x^2\frac{dy}{dx} = y - x,$$

welche durch die Reihe

$$y = x + 1!\,x^2 + 2!\,x^3 + \cdots + (n-1)!\,x^n + \cdots$$

befriedigt wird, die nur für $x = 0$ konvergiert.

Die der Differentialgleichung (53) formell genügende Potenzreihe (54) gibt trotz ihrer Divergenz Aufschluß über das Verhalten der Lösungen y der Differentialgleichung bei der Annäherung der Veränderlichen x an die singuläre Stelle $x = 0$. Wir geben einige hierher gehörige Sätze ohne Beweis an.

Wir nehmen an, die Veränderliche x gehe als reelle positive Größe zur Grenze Null, was wir durch $\lim x = +0$ bezeichnen. Je nachdem der

reelle Teil von a positiv oder negativ ist, gibt es unendlich viele Integrale y oder nur ein einziges Integral y der Differentialgleichung (53), welches für $\lim x = +0$ den Grenzwert Null besitzt. Im Falle $\Re(a) > 0$ sind zwei positive Größen x_0 und ε_0 so vorhanden, daß jedes Integral y, dessen absoluter Betrag für $x = x_0$ kleiner als ε_0 ist, für $\lim x = +0$ verschwindet.

Ist y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (53), welches für $\lim x = +0$ verschwindet, und setzt man, unter n irgendeine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ verstehend,

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + z_n x^n,$$

so ist

$$\lim z_n = 0 \text{ für } \lim x = +0.$$

Es ist also für $\lim x = +0$

$$\lim y = 0,$$

$$\lim \frac{y - C_1 x}{x} = 0,$$

$$\lim \frac{y - C_1 x - C_2 x^2}{x^2} = 0,$$

. . . . . .

$$\lim \frac{y - C_1 x - C_2 x^2 - \cdots - C_n x^n}{x^n} = 0,$$

. . . . . .

Dafür sagt man nach Poincaré: das fragliche Integral y der Differentialgleichung wird durch die divergente Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu x^\nu$$

asymptotisch dargestellt. Man schreibt

$$y \sim C_1 x + C_2 x^2 + \cdots.$$

Mit der asymptotischen Darstellung hängt auch der folgende Satz zusammen:

Für jedes Integral y der Differentialgleichung (53), welches für $\lim x = +0$ verschwindet, ist

$$\lim \frac{d^n y}{dx^n} = n! C_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

für $\lim x = +0$.

Will man sich nicht auf reelle positive x beschränken, so kann man dadurch, daß man x mit einer geeigneten Konstanten multipliziert, $a = -1$ machen. Die Differentialgleichung

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = A_{10} x + A_{20} x^2 + A_{11} x y + A_{02} y^2 + \cdots \tag{55}$$

besitzt ein und nur ein Integral η mit der Eigenschaft $\lim \eta = 0$ für $\lim x = +0$. Man kann zeigen, daß die asymptotische Gleichung

$$\eta \sim C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

nicht nur für reelle positive x, sondern in dem ganzen Sektor

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$$

gilt. Das ausgezeichnete Integral η läßt sich in der Form

$$\eta = \int_0^\infty v(t) e^{-\frac{t}{x}} dt$$

(Laplacesches Integral) darstellen; als Integrationsweg dient die positive reelle Achse der t-Ebene oder eine andere von $t = 0$ ins Unendliche gehende Gerade. Aus dem Laplaceschen Integral läßt sich nicht nur die divergente Potenzreihe, sondern auch eine konvergente Fakultätenreihe herleiten. In jedem der Sektoren $\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ und $-\frac{3\pi}{2} < \arg x < -\frac{\pi}{2}$ werden unendlich viele Integrale der Differentialgleichung (55) durch die Reihe $C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$ asymptotisch dargestellt[1]).

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + P_1 \frac{dw}{dx} + P_2 w = 0, \tag{56}$$

deren Koeffizienten

$$\begin{cases} P_1 = a_1 + \dfrac{a_1^{(1)}}{x} + \dfrac{a_1^{(2)}}{x^2} + \cdots, \\ P_2 = a_2 + \dfrac{a_2^{(1)}}{x} + \dfrac{a_2^{(2)}}{x^2} + \cdots \end{cases} \tag{57}$$

in der Umgebung von $x = \infty$ regulär sind, hat $x = \infty$ zur Unbestimmtheitsstelle. (Denn nach § 40 müßte, wenn $x = \infty$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit wäre,

$$P_1 = \frac{1}{x} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right), \quad P_2 = \frac{1}{x^2} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

sein, wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ sind.)

Setzt man

$$y = \frac{d \log w}{dx}, \tag{58}$$

[1]) Vgl. die Arbeiten des Verfassers in Crelles Journal, Bd. 118, 119, 144, 151.

so ist

$$\frac{dw}{dx} = wy,$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = w\frac{dy}{dx} + y\frac{dw}{dx} = w\left(\frac{dy}{dx} + y^2\right),$$

so daß y der Riccatischen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + P_1 y + P_2 = 0 \tag{59}$$

genügt[1]).

Die quadratische Gleichung

$$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0 \tag{60}$$

habe zwei verschiedene Wurzeln α_1 und α_2, so daß $2\alpha + a_1$ sowohl für $\alpha = \alpha_1$, als auch für $\alpha = \alpha_2$ von Null verschieden ist. Die Differentialgleichung (59) geht durch die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \alpha + \eta,$$

wo α eine der Zahlen α_1, α_2 bedeutet, in eine Differentialgleichung von der Form (53) über.

Wir behandeln jedoch die Riccatische Differentialgleichung (59) direkt, indem wir die Reihe

$$y = \alpha + \frac{\alpha^{(1)}}{x} + \frac{\alpha^{(2)}}{x^2} + \cdots$$

einsetzen und die Koeffizienten vergleichen. Zunächst ergibt sich die quadratische Gleichung (60) für α; weiter ist

$$(2\alpha + a_1)\alpha^{(1)} + a_1^{(1)}\alpha + a_2^{(1)} = 0$$

und

$$(2\alpha + a_1)\alpha^{(n)} + \cdots = 0,$$

---

[1]) Als Riccatische Differentialgleichung bezeichnet man eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y^2 + B(x)y + C(x) = 0,$$

wo A, B, C irgendwelche Funktionen von x sind. Hierin ist die spezielle Riccatische Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$$

als besonderer Fall enthalten.

wo die nicht angeschriebenen Glieder von $\alpha, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n-1)}$ abhängen. Die Differentialgleichung (59) wird also durch zwei (im allgemeinen divergente) Reihen

$$\alpha_i + \frac{\alpha_i^{(1)}}{x} + \frac{\alpha_i^{(2)}}{x^2} + \cdots \qquad (i = 1, 2),$$

befriedigt.

Zufolge der Gleichung

$$w = e^{\int y\,dx}$$

erhält man, wenn man

$$y = \alpha + \frac{\alpha^{(1)}}{x} + \frac{\alpha^{(2)}}{x^2} + \cdots$$

setzt und formal rechnet,

$$\int y\,dx = \alpha x + \alpha^{(1)} \log x - \frac{\alpha^{(2)}}{x} - \frac{\alpha^{(3)}}{2x^2} - \cdots$$

und, wenn $\alpha^{(1)} = \varrho$ und

$$e^{-\frac{\alpha^{(2)}}{x} - \frac{\alpha^{(3)}}{2x^2} - \cdots} = c + \frac{c^{(1)}}{x} + \frac{c^{(2)}}{x^2} + \cdots \qquad (c = 1)$$

gesetzt wird,

$$w = e^{\alpha x} x^{\varrho} \left(c + \frac{c^{(1)}}{x} + \frac{c^{(2)}}{x^2} + \cdots \right).$$

Die lineare Differentialgleichung (56) wird also durch zwei Reihen (Thomésche Normalreihen)

$$(61) \qquad e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i} \left(c_i + \frac{c_i^{(1)}}{x} + \frac{c_i^{(2)}}{x^2} + \cdots \right) \qquad (i = 1, 2),$$

die im allgemeinen divergent sind, formell befriedigt.

Wir geben einen Satz ohne Beweis an.

Die Wurzeln α_1, α_2 der Gleichung (60) seien reell und $\alpha_2 > \alpha_1$, was man dadurch erreichen kann, daß man x mit einer geeigneten Konstanten multipliziert. Dann besitzt die lineare Differentialgleichung (56) zwei ausgezeichnete Integrale $w_i (i = 1, 2)$ (die man als Laplacesche Integrale darstellen kann), so daß für große x und für $-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ die asymptotische Gleichung

$$w_1 \sim e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1} \left(c_1 + \frac{c_1^{(1)}}{x} + \frac{c_1^{(2)}}{x^2} + \cdots \right),$$

für $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{5\pi}{2}$ die asymptotische Gleichung

$$w_2 \sim e^{\alpha_2 x} x^{\varrho_2} \left(c_2 + \frac{c_2^{(1)}}{x} + \frac{c_2^{(2)}}{x^2} + \cdots \right)$$

besteht. D. h. es ist, wenn n eine der Zahlen $1, 2, \ldots$ bedeutet,

$$w_i = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i} \left(c_i + \frac{c_i^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{c_i^{(n)}}{x^n} + \frac{z_i^{(n)}}{x^n} \right) \qquad (i = 1, 2);$$

dabei ist

$$\lim z_1^{(n)} = 0,$$

wenn x mit einem Argument zwischen $-\frac{3\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$,

$$\lim z_2^{(n)} = 0,$$

wenn x mit einem Argument zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{5\pi}{2}$ ins Unendliche geht[1]).

[1]) Außer dem bereits erwähnten 8. Kapitel des Buches von Schlesinger vgl. Enzykl. d. math. Wiss. II 2, S. 489—494 und die im 21. Bd. der Math. Zeitschr., S. 85 angeführten neueren Arbeiten.

Literatur.

Bieberbach, L., Theorie der Differentialgleichungen, 2. Aufl., Berlin 1926.

Bôcher, M., Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires, Paris 1917.

Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, herausgegeben von Ph. Frank und R. v. Mises, erster Teil, II. Abschnitt, Braunschweig 1925 (7. Aufl. von Riemann-Webers Differentialgleichungen der Physik).

Forsyth, A. R., Lehrbuch der Differentialgleichungen, herausgegeben von H. Maser, 2. Aufl. von W. Jacobsthal, Braunschweig, Neudruck 1924.

— Theory of differential equations, vol. II—IV, Cambridge 1900, 1902.

Goursat, E., Cours d'analyse mathématique, Paris; tome II (4. éd. 1925), tome III (3. éd. 1923).

Heffter, L., Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig 1894.

Hoheisel, G., Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sammlung Göschen Nr. 920, Berlin und Leipzig 1926.

Horn, J., Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Sammlung Schubert L, Leipzig 1905 (soweit der Inhalt nicht in die vorliegende Neubearbeitung aufgenommen ist).

Hort, W., Die Differentialgleichungen des Ingenieurs, 2. Aufl., Berlin 1925.

Ince, E. L., Ordinary differential equations, London 1927.

Jordan, C., Cours d'analyse, tome III, 3. éd., Paris 1915.

Koenigsberger, L., Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen, Leipzig 1889.

Liebmann, H., Lehrbuch der Differentialgleichungen, Leipzig 1901.

Picard, E., Traité d'analyse, Paris; tome II, 3. éd. 1925, tome III, 2. éd. 1909.

Schlesinger, L., Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage, 3. Aufl., Berlin und Leipzig 1922.

— Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. I, II_1, II_2, Leipzig 1895—1898.

— Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin 1908.

Serret, J. A. und G. Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Bd. III, 6. Aufl., Leipzig und Berlin 1924.

Vallée-Poussin, Ch. de la, Cours d'analyse infinitésimale, tome II, 5. éd., Louvain 1926.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Leipzig und Berlin (1900 bis 1921):

Bd. IIA, 4a. Painlevé, P., Gewöhnliche Differentialgleichungen, Existenz der Lösungen.

Bd. IIA, 4b. Vessiot, E., Gewöhnliche Differentialgleichungen, elementare Integrationsmethoden.

Bd. IIA, 7a. Bôcher, M., Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Bd. IIB, 5. Hilb, E., Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet.

Bd. IIB, 6. Hilb, E., Nichtlineare Differentialgleichungen.

Bd. IIC, 2. Runge, C. und Fr. A. Willers, Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen.

Bd. IIID, 8. Liebmann, H., Geometrische Theorie der Differentialgleichungen.

Sachregister.

(Die Zahlen geben die Seiten an.)

Allgemeines Integral 4, 60, 69.
Anfangswerte 105, 151.
Annäherung, schrittweise 25, 50.
Aperiodische Bewegung 74.
Asymptotische Darstellung 190.

Bernoullische Differentialgleichung 11.
Besselsche Differentialgleichung 132, 134.
Besselsche Funktionen 134, 135, 137.
Bestimmtheit, singuläre Stelle der 113, 144.

Cauchy-Lipschitzsche Methode 41.
Charakteristische Gleichung 61, 82.
Clairautsche Differentialgleichung 17.
Czuber, Methode von 49.

D'Alembertsche Differentialgleichung 16.
Determinante eines Fundamentalsystems 57, 58, 79, 80.
Determinanten, unendliche 142.
Determinierende Fundamentalgleichung 115.
Differentialgleichungen erster Ordnung 1, 25, 39, 48, 101, 151, 166, 176.
Differentialgleichungen zweiter Ordnung 18, 23, 47, 53.
Differentialgleichungssysteme 23, 31, 45, 52, 78, 82, 109, 160, 161, 164, 169.
Diskriminantengleichung 36.
Divergente Reihen 188.

Elementare Integrationsmethoden 1, für lineare Differentialgleichungen 55.
Erzwungene Schwingungen 75.
Exakte Differentialgleichungen 11.
Existenzbeweise 25, 31, 41, im komplexen Gebiet 101, 109.

Frobenius, Verfahren von 116.
Fuchsscher Typus 125.
Fundamentalgleichung 95, 135, determinierende 115.
Fundamentalsystem 57, 79.

Gaußsche Differentialgleichung 126.
Gedämpfte Schwingungen 73.
Gewöhnliche Differentialgleichungen 1.
Graphische Methoden 39, 48, 50.

Hauptkoordinaten 89.
Homogene Differentialgleichungen 5.
Homogene lineare Differentialgleichungen 56, 78.
Hüllkurve 18, 37.
Hypergeometrische Reihe 127.

Integral 1.
Integralkurve 2.
Integration 1.
Integrierender Faktor 13.
Isoklinen 48.

Knotenpunkt 178, 187.
Krümmungsradius 47.
Kugelfunktionen 130, zweiter Art 131, zugeordnete 131.
Kutta, Methode von 42, 46.

Laplacesche Differentialgleichung 137.
Laplacesche Integrale 191.
Laurentsche Reihen 139.
Legendresche Differentialgleichung 129.
Legendresche Polynome 130.
Lineare Differentialgleichungen 55, 90, 111, erster Ordnung 8, elementare Integrationsmethoden 55, Existenz der Lösungen 56, homogene mit konstanten Koeffizienten 61, mit periodischen Koeffizienten 94, nichthomogene 66, Nullstellen der Integrale 90.
Lineare partielle Differentialgleichung 155.
Linear unabhängige Lösungen 61.
Lipschitzsche Bedingung 25, 31, 34.
Lösung 1.

Multiplikator 14.

Nichthomogene lineare Differentialgleichungen 66, 70, 81.
Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen 90.
Numerische Methoden 39.

Ordnung einer Differentialgleichung 1.

Parameter 105, 161, 164.
Partikuläres Integral 4, einer nichthomogenen linearen Differentialgleichung 70.
Periodische Koeffizienten 94.
Periodische Lösungen 161, 164.

Quadratur 2.

Reihe, Taylorsche 42, 46.
Reihenentwicklung der Integrale einer linearen Differentialgleichung 113, 138, der Lösungen von Differentialgleichungssystemen 169.
Riccatische Differentialgleichung 192.
Richtungsfeld 3.
Runge, Methode von 42, 43, 46.

Sattelpunkt 181, 187.
Schrittweise Annäherung 25, 50.
Schwingungen 72, 86, 160.
Singuläre Lösung 18, 35.
Singuläre Punkte der reellen Integralkurven 176.
Singuläre Stellen einer linearen Differentialgleichung 112, der Bestimmtheit 113, 144, der Unbestimmtheit 142, 144.
Singularitäten einer Differentialgleichung erster Ordnung 166.
Spitzen der Integralkurven 38.
Strudelpunkt 179, 184, 187.
Substitution, lineare 95, 167.
Systeme linearer Differentialgleichungen 33, 34, 78, 110, mit konstanten Koeffizienten 82, nichthomogene 81, Systeme nichtlinearer Differentialgleichungen 23, 31, 45, 109, 147, 153, 155, 161, 164, 169.

Taylorsche Reihe 42, 46.
Thomésche Normalreihen 193.
Trennung der Veränderlichen 3.

Unbestimmtheit, Stelle der 142, 144.
Ungedämpfte Schwingungen 73.

Variation der Konstanten 9, 68, 81.

Wirbelpunkt 181, 184, 187.
Wronskische Determinante 57.

Zylinderfunktionen 134.

Walter de Gruyter & Co. **Berlin W 10 und Leipzig**
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 595 33

Als Ergänzung des vorliegenden Werkes empfehlen wir:

Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage

Von

Dr. Ludwig Schlesinger
o. Professor an der Universität Gießen

1922. Dritte, neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VIII, 326 Seiten
Geheftet M. 10.—, gebunden M. 11.—

Es kommt für den Anfänger nicht so sehr darauf an, daß er gleich die ganze Tragweite einer bestimmten Methode kennen lernt, als vielmehr darauf, daß er zunächst ihr Wesen richtig erfaßt. Um dieses Ziel zu erreichen, genügt es aber, die betreffende Methode an Beispielen zu entwickeln, die einerseits so allgemein sind, daß keine der Schwierigkeiten, die durch das Wesen jener Methode überwunden werden sollen, fehlt, und andererseits so speziell, daß Schwierigkeiten accessorischer Natur möglichst vermieden werden.
Der Wert einer Darstellung, wie der hier vorliegenden, wird naturgemäß nicht in ihrer durchgängigen Eigenart zu suchen sein; handelt es sich ja zum Teil um die Entwicklung von Theorien, die außer von den Urhebern auch schon anderweit vielfach behandelt worden sind.
Zwei Gesichtspunkte seien noch hervorgehoben: Einmal, daß der Verfasser die Grundlage für einen systematischen Aufbau der Theorie der Differentialgleichungen in der Unterscheidung zwischen festen und mit den Anfangswerten verschiebbaren Singularitäten der Lösungen zu finden glaubte, das andere Mal, daß des Verfassers Bestreben war, durch die hier gegebene Darstellung diese Theorie auch denjenigen leichter zugänglich zu machen, die es mit den Anwendungen der Analysis zu tun haben.

Unser Fachkatalog „Mathematik"
steht durch jede Buchhandlung oder direkt vom Verlage kostenlos zur Verfügung.

QA
372
H79
1927

NOV 7 1973

RAYMOND H. FOGLER LIBRARY

Walter de Gruyter & Co. **Berlin W 10 und Leipzig**
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 595 33

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Gegründet von A. L. CRELLE 1826. Herausgegeben unter Mitwirkung der Herren Hasse, Schäfer, Schlesinger, Schottky von Geh. Reg.-Rat Dr. KURT HENSEL, o. Prof. a. d. Univ. Marburg. Band 1—140 Preise auf Anfrage, Band 141—144 je 16.—, Band 145—147 je 12.—, Band 148—151 je 10.—, Band 152 12.—, Band 153 17.50, Band 154 30.—, Band 155—156 je 36.—, Band 157 u. 158 (Jubiläumsband I/II) je 36.—

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Gegründet von KARL OHRTMANN und FELIX MÜLLER, fortgeführt von EMIL LAMPE. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von H. Hahn, E. Hecke, G. Herglotz, O. Hölder, A. Loewy, L. Neder, O. Perron, E. Salkowski, G. Szegö, A. Wangerin, H. Weyl herausgegeben von LEON LICHTENSTEIN. Band 1—48: Jahrgang 1868—1922. Band 1—44 Preise auf Anfrage, Band 45 75.—, Band 46: 92.—, Band 47: 74.—, Band 48 Heft 1—6 je 12.—, Heft 7: 11.—

Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. GEORG SCHEFFERS, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 743 Seiten. 1925. 30.—, geb. 33.—

Geschichte der Mathematik. I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Von Professor Dr. S. GÜNTHER in München. Mit 56 Figuren. VIII, 428 Seiten. 1908. (Sammlung Schubert Bd. 18.) Geb. 11.80
II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis. Von Oberstudienrat Dr. H. WIELEITNER in Augsburg. Mit 6 Figuren. VIII, 251 Seiten. 1911. (Sammlung Schubert Bd. 63.) Geb. 8.40
II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. 2. Hälfte: Geometrie und Trigonometrie. Von Oberstudiendirektor Dr. H. WIELEITNER in München. Mit 13 Fig. VI, 222 Seiten. 1921. (Sammlung Schubert Bd. 64.) Geb. 3.50

Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Von Professor Dr. JOHANNES TROPFKE, Direktor der Kirschner-Oberrealschule zu Berlin. Zweite, verbesserte und sehr vermehrte Auflage. Lex.-Oktav.
Band 1: Rechnen. VII, 177 Seiten. 1921. 7.20, geb. 8.20
Band 2: Allgemeine Arithmetik. IV, 221 Seiten. 1921. 8.50, geb. 9.50
Band 3: Proportionen, Gleichungen. IV, 151 Seiten. 1922. 6.—, geb. 7.—
Band 4: Ebene Geometrie. IV, 240 Seiten. 1922. 9.—, geb. 10.—
Band 5: I. Ebene Trigonometrie. II. Sphärik und sphärische Trigonometrie. IV, 185 Seiten. 1923. 7.50, geb. 8.50
Band 6: Analysis, Analytische Geometrie. IV, 169 Seiten. 1924. 7.—, geb. 8.—
Band 7: Stereometrie. Verzeichnisse. V, 128 Seiten. 1924. 6.50, geb. 7.50

Fünfstellige Logarithmentafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. PETERS, Observator am Astronomischen Institut. Lex.-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912. 6.—, geb. 7.—

Vollständige Logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von Professor Dr. E. F. AUGUST, weiland Direktor des Köllnischen Realgymnasiums, Berlin. Achtundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. AUGUST, weiland Prof. a. d. Artillerie- u. Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII, 204 S. 1927. Geb. 2.—

Vierstellige Logarithmentafeln. Von Dr. MAX ZACHARIAS, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. PAUL METH, Studienrat a. d. Herderschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. 1927. 1.50

Walter de Gruyter & Co. **Berlin W 10 und Leipzig**
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 59533

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. Von Dr. GERHARD KOWALEWSKI, o. Prof. an der Techn. Hochsch. in Dresden. Zweite, verk. Aufl. Gr.-Okt. IV, 304 S. 1925. 14.—, geb. 15.50

Allgemeine Formen- und Invariantentheorie. Von Prof. Dr. W. FRANZ MEYER i. Königsb. I. Teil: Binäre Formen. VIII, 376 S. 1909. (Slg. Schub. Bd. 33.) Geb. 11.70

Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigen physikalischen Anwendungen. Von Dr. ARTHUR HAAS, a. o. Professor an der Universität Wien. Mit 37 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 149 Seiten. 1922. 4.—, geb. 5.—

Zahlentheorie. Von Dr. KURT HENSEL, o. ö. Professor an der Universität Marburg. Groß-Oktav. XII, 356 Seiten. 1913. 10.—, geb. 11.—

Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Von Dr. L. SCHLESINGER, o. Professor an der Universität Gießen, und Dr. A. PLESSNER. Groß-Oktav. VIII, 229 Seiten. 1926. 14.—, geb. 16.—

Funktionentheoretische Vorlesungen. Von HEINRICH BURKHARDT. Neu herausgegeb. von Dr. GEORG FABER, o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. in München.
I. Band 1. Heft. Dritte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 182 Seiten. 1920. 6.—, geb. 7.20
I. Band 2. Heft. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 286 Seiten. 1921. 9.—, geb. 10.50
II. Band. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VI, 444 Seiten. 1920. 14.—, geb. 15.50

Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. Von Dr. LUDW. SCHLESINGER, o. Professor an der Universität Gießen. Dritte, neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VIII, 326, Seiten. 1922. 10.—, geb. 11.—

Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Von HEINRICH W. E. JUNG, o. ö. Prof. an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abb. im Text. Groß-Oktav. VI, 246 S. 1923. 3.50, geb. 4.—

Elliptische Funktionen. Von Professor Dr. KARL BOEHM in Heidelberg.
I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen, aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Fig. XII, 356 Seiten. 1908. (Samml. Schubert Bd. 30). Geb. 11.70
II. Teil: Theorie der elliptischen Integrale; Umkehrproblem. Mit 28 Figuren. VII, 180 Seiten. 1910. (Samml. Schubert Bd. 61.) Geb. 7.80

Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Von Professor Dr. A. WANGERIN in Halle a. d. S.
I. Teil: Mit 46 Fig. VIII, 255 S. Unveränd. Neudr. 1922. (Slg. Schub. Bd. 58.) Geb. 4.—
II. Teil: Mit 17 Fig. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59.) Geb. 4.—

Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung. Von Professor E. GRIMSEHL, Hamburg.
I. Teil: Mit 74 Fig. VII, 219 Seiten. 1905. (Samml. Schubert Bd. 38.) Geb. 7.40

Grundzüge der ebenen Geometrie. Von Professor Dr. FR. BOHNERT in Hamburg. Mit 220 Fig. VIII, 223 Seiten. 1915. (Samml. Schubert Bd. 2.) Geb. 3.90

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Prof. Dr. F. BOHNERT in Hamburg. Zweite Auflage. Dritter Neudruck. Mit 63 Figuren. VIII, 167 Seiten. 1919. (Samml. Schubert Bd. 3.) Geb. 4.40

Einführung in die analytische Geometrie. Von Professor Dr. GERHARD KOWALEWSKI. Mit 112 Figuren. Zweite, unveränderte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 360 Seiten. 1923. Geb. 11.20

Walter de Gruyter & Co. **Berlin W 10 und Leipzig**
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 595 33

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Von Dr. FRIEDRICH SCHUR, o. Professor an der Universität Breslau. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 81 Figuren. Groß-Oktav. XII, 248 Seiten. 1912. 6.50, geb. 7.70

Spezielle ebene Kurven. Von Oberstudiendirektor Dr. HEINRICH WIELEITNER in München. Mit 189 Fig. XVI, 409 S. 1908. (Samml. Schubert Bd. 56.) Geb. 14.80

Analytische Geometrie auf der Kugel. Von Studienrat Prof. Dr. RICH. HEGER in Dresden. Mit 4 Fig. VII, 152 S. 1908. (Samml. Schubert Bd. 54.) Geb. 5.20

Kreis und Kugel. Von Dr. WILHELM BLASCHKE, o. Prof. an der Universität Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X, 169 Seiten. 1916. 4.40, geb. 5.50.

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Von Dr. GEORG SCHEFFERS, Geheimer Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923. 13.—, geb. 14.50

II. Mit 110 Fig. Dritte, verbesserte Aufl. XI, 582 Seiten. 1922. 15.—, geb. 16.50

Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Von Oberstudiendirektor Dr. VIKTOR KOMMERELL in Tübingen und Prof. Dr. KARL KOMMERELL in Tübingen. I. Teil. Dritte Auflage. Mit 28 Figuren. VIII, 184 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 29.) Geb. 3.—

II. Teil. Dritte Aufl. Mit 13 Fig. IV, 196 S. 1921. (Samml. Schubert Bd. 44.) Geb. 3.—

Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme. Von Oberstudiendirektor Dr. VIKTOR KOMMERELL in Tübingen und Prof. Dr. KARL KOMMERELL in Tübingen. Mit 9 Fig. VI, 171 S. 1911. (Samml. Schubert Bd. 62.) Geb. 7.30

Liniengeometrie mit Anwendungen. Von Professor Dr. KONRAD ZINDLER in Innsbruck. I. Teil. Mit 87 Figuren. VIII, 380 Seiten. 1902. (Samml. Schubert Bd. 34.) Vergriffen

II. Teil. Mit 24 Fig. VII, 252 Seiten. 1906. (Samml. Schubert Bd. 51.) Geb. 9.50

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. KARL ROHN, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig und Dr. ERWIN PAPPERITZ, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielflache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. 1913. Anastatischer Nachdruck. 1921. 16.50, geb. 18.—

II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. VI, 194 Seiten mit 118 Figuren. 1916. 6.20, geb. 7.20

III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Dritte, umgearbeitete Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1906. Anastatischer Nachdruck. 1921. 10.80, geb. 12.—

Darstellende Geometrie. Von THEODOR SCHMID, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 Seiten. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65.) Geb. 6.—

II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Figuren. 340 Seiten. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66.) Geb. 7.50

Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Professor Dr. HERMANN SCHUBERT. Vierte Auflage, neu bearbeitet von Professor Dr. F. FITTING, München-Gladbach. Oktav. 245 Seiten. 1924. Geb. 6.—

STECHERT & CO.
BERLIN

QA372.H79 1927
ORO
Gewohnliche Differentialgleichungen
3 7550 00155177 0

YO-AUU-703